Intégration

Exercice 1.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

On considère la fonction $f: x \mapsto x$ sur l'intervalle $I = [0,2]$.

1.

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}$$

Est une somme de Riemann associe à f sur I.

2.

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$$

Est une somme de Riemann associe à f sur I.

3.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2}$$

Est une somme de Riemann associe à f sur I.

4.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4i}{n^2}$$

Est une somme de Riemann associe à f sur I.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

Toutes les fonctions considérées sont supposées intégrables sur l'intervalle considéré.

1. L'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction négative ou nulle est négative ou nulle.
2. L'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction paire est positive ou nulle.
3. L'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction impaire est nulle.
4. L'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction minorée par 1 est inférieure ou égale à 1.
5. L'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction majorée par 1 est inférieure ou égale à 1.
6. L'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction majorée par 2 est inférieure ou égale à 4.
7. Si une fonction f est telle que pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) < x^3$, alors son intégrale sur $[-1,1]$ est strictement négative.
8. Si l'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction f continue vaut y, alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = y$.
9. Si l'intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction f vaut y, alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 2y$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

1. Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est continue.
2. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, sauf en un point, alors f admet une primitive qui s'annule en b.
3. Toutes fonctions continue sur $[a, b]$ admet une primitive qui s'annule en b.
4. Toute primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$ s'annule en un point de $[a, b]$.
5. Toute primitive d'une fonction continue sur $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$.
6. Toute primitive d'une fonction continue sur $]a, b[$ est dérivable à droite en a.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

1. Toute primitive d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.
2. Toute primitive d'une fonction négative ou nulle est décroissante.
3. Toute fonction continue est la primitive d'une fonction continue.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt=0$$
2. Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt=0$$
On pourra commencer par montrer que pour tout $\alpha<\beta$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta \sin(nt)\,dt=0$$
3. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt=0$$
On rappelle que pour toute fonction continue sur $[a,b]$, pour tout $\epsilon>0$, il existe une fonction en escalier χ telle que
$$\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-\chi(t)|<\epsilon$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit f la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.
$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$
On rappelle que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des rationnels et des irrationnels. Soit n un entier strictement positif. Pour $i=0,\dots,n$, on pose $a_i=\frac{i}{n}$.

1. Montrer que pour tout $i=1,\dots,n$, il existe x_i et y_i dans $[a_{i-1},a_i]$ tels que $f(x_i)=1$ et $f(y_i)=0$.
2. On considère les deux subdivisions pointées
$$D_1=\{([a_{i-1},a_i],x_i)\}_{1\le i\le n}\qquad \text{et} \qquad D_2=\{([a_{i-1},a_i],y_i)\}_{1\le i\le n}$$
Montrer que $S_{D_1}(f)=1$ et $S_{D_2}(f)=0$
On rappelle que
$$S_D(f)=\sum_{i=1}^n f(\alpha_i)(a_i-a_{i-1})$$
Pour $D=\{([a_{i-1},a_i],\alpha_i)\}_{1\le i\le n}$
3. En déduire que f n'est pas intégrable.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

1. Montrer que le produit de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier.
2. La composée de deux fonctions en escalier est toujours une fonction en escalier. Est-ce vrai ou faux ? (Justifier).

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Montrer que si f est intégrable, alors $|f|$ est également intégrable.
On rappelle le théorème

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$.
Si pour tout $\epsilon > 0$ il existe g Riemann-intégrable sur $[a, b]$ tel que

$$\sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \epsilon$$

Alors f est Riemann-intégrable.
Et on pourra utiliser une forme de l'inégalité triangulaire.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soient a et b deux réels fixés, avec $a < b$. On note $C_a([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et $\mathcal{E}_0$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ nulles en a.

1. Montrer que $C_a([a, b])$ et $\mathcal{E}_0$ sont en somme directe.
2. Montrer que l'espace $C_a([a, b]) \oplus \mathcal{E}_0$ est égal à l'espace des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes :

$$S_{1,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}; \qquad S_{2,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}; \qquad S_{3,n} = n \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^2};$$

$$S_{4,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}; \qquad S_{5,n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2}; \qquad S_{6,n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3 + n^2 k}}$$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Calculer, si elle existe

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1 + t^n} dt$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire que

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

On pose pour tout $n \geq 0$

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$$

1. Calculer I_0 et I_1
2. Pour tout $n \geq 1$ trouver une relation entre I_n et I_{n-1} et pour tout $n \geq 2$ en déduire une relation entre I_n et I_{n-2}.
3. Déterminer I_n pour tout $n \geq 0$.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n(u)}$$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e (\ln(u))^n du$$

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire.

On pose

$$F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt$$

1. A l'aide du changement de variable $u = -t$ calculer
$$F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$, que peut-on en déduire sur F.
3. Calculer
$$\int_{2\pi}^{4\pi} f(t)dt$$

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soit F la fonction définie pour tout $x > 1$ par

$$F(x)=\int_{x-1}^{x^2-1}\frac{dt}{\ln(1+t)}$$

1. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $t>0$:
$$t-\frac{t^2}{2}<\ln(1+t)<t$$
2. En déduire que pour tout $x\in\left]1,\sqrt{3}\right[$:
$$\ln(1+x)\le F(x)\le \ln(1+x)+\ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right)$$
Puis
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}F(x)$$
3. Calculer, pour tout >1, $F'(x)$.
4. En déduire que pour tout $x>1$, $F(x)>\ln(2)$.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Soit $I=]1,+\infty[$. On désigne par f l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x\in I$, par
$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt$$

Première partie

Dans cette partie on ne cherchera pas à exprimer f à l'aide de fonctions usuelles

1. Déterminer le signe de $f(x)$.
2. Justifier la dérivabilité de f sur I, et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on exprimera $f'(x)$ de la manière la plus simple possible.
3.
   a) Montrer que pour tout $t\in I$,
   $$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$
   On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t.

   b) En déduire l'existence et la valeur de
   $$\lim_{x\to 1^+}f(x)$$

Deuxième partie

1. Déterminer une primitive de la fonction $t\longmapsto\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Exprimer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles de la façon la plus simple possible.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Soit F la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par
$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sin(t)}$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, puis qu'elle est de classe C^1 sur cet intervalle.
2. Calculer $F'(x)$, en déduire les variations de F sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
3. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $t\in[x,2x]\subset\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ (c'est-à-dire pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$).

$$0 < t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$$

4. En déduire que

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t} + \frac{1}{2-t}$$

5. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)$$

6. En déduire la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Soit F la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

1. Montrer que f est continue sur $]-1,1[$.
2. En déduire que F est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
3. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 0$ et calculer $F'(0)$.
4. Montrer que F est impaire.
5. Déterminer les variations de F sur $]0,1[$. Puis sur $]-1,0[$.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soit $I = [a, b]$ et soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que:

f est décroissante et $g(I) \subset [0,1]$

et on pose $\lambda = \int_a^b g(t)dt$, $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ et $F(x) = \int_a^{a+G(x)} f(t)dt - \int_a^x f(t)g(t)dt$

1. Montrer que F et G sont de classe C^1 sur I.
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $a + G(x) \leq x$
3. Etudier les variations de F sur $I = [a, b]$.
4. En déduire l'inégalité

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t)dt$$

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$.

Soit g une fonction définie sur $[0, a]$ par :

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$$

1. Montrer que g est dérivable.
2. Calculer g' et en déduire g.

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit $0 < a < 1$. On considère

$$I = \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

1. Montrer que

$$\int_{1}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = -\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = \frac{1}{t}$

2. En déduire la valeur de I.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Soit $a \in]-\pi, \pi[$. Les trois questions sont indépendantes.

Soient $F(a) = \int_0^a \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} dx$, $G(a) = \int_0^a \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx$ et $H(a) = \int_0^a \frac{1}{1+\cos(x)} dx$

1. Calculer $F(a)$.
2. Le but de cette question est de calculer $G(a)$ à l'aide d'un changement de variable.
   a) A l'aide des règles de Bioche, déterminer le « bon changement de variable ».
   b) Calculer $G(a)$ à l'aide de ce changement de variable.
3. Trouver une relation élémentaire entre $G(a)$ et $H(a)$ et en déduire $H(a)$.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$

Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = x \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\right) dt$

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On admettra que f est impaire.
2. Calculer la dérivée de f et en déduire les variations de f.
   Et montrer que $\frac{1}{2\sqrt{5}} \leq \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$
3. Donner le développement limité de f à l'ordre 1 en 0 et en déduire une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
4. Encadrer $\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$, en déduire un encadrement de $f(x)$, puis la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que $0 \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{2}{t^6}$, puis montrer que

$$0 \leq g(x) \leq \frac{31}{80x^4}$$

   En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
6. Tracer sommairement le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soit F l'application définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. A l'aide du changement de variable $u = -t$, étudier la parité de F.
3. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$0 < F(x) < \frac{1}{2x}$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

4. Calculer la dérivée de F et résoudre $F'(x) = 0$, pour $x > 0$.

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soit $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, F est dérivable.
2.
   a) A l'aide de la formule de Taylor Lagrange, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe $c \in]-|t|,|t|[$ tel que :
   $$e^{-t} = 1 - te^{-c}$$
   b) En déduire que pour tout $t \in [-1,1]$, $t \neq 0$.
   $$\frac{1}{e} < \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t} < e$$
   c) Trouver un encadrement de F et en déduire que F est continue en $x = 0$.
3. Pour tout $x \neq 0$, calculer la dérivée F' de F. F est-elle dérivable en 0 ? que peut-on en déduire sur l'allure de le graphe de F ?
4. Etudier les variations de F.
5. Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$, en déduire une majoration de F et sa limite en $+\infty$.
6. En reprenant l'égalité du 2. a), montrer que pour tout $t < 0$, $e^{-t} > 1 - t$ en déduire que pour tout $x < 0$
   $$F(x) > -\ln(2) - x$$
   En déduire la limite de F en $-\infty$.
7. Tracer l'allure du graphe de F.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1}$ pour $t \neq 1$ et $f(1) = 1$

Soit F, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ $F(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$

1. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer le signe de f sur $]0, +\infty[$ selon les valeurs de t.
3. Déterminer le signe de F sur $]0, +\infty[$ selon les valeurs de x.
4. Montrer que F est de classe C^1, calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F sur $]0, +\infty[$.

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soient $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} dx$ et $I_{\varepsilon,a} = \int_\varepsilon^a \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} dx$

1. Calculer $\int \frac{2t^2}{t^2-1} dt$
2. A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{1-x}$ calculer $\int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx$
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$F(x)=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}dx=-2\ln(x)\sqrt{1-x}+4\sqrt{1-x}+2\ln\left(1-\sqrt{1-x)}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)+K$$

Où K est une constante réelle.

4. Montrer que I est une intégrale généralisée en 0 et en 1.
5. Montrer que I converge.
6. A l'aide d'un développement limité, à l'ordre 1, au voisinage de 0, de $x\to\sqrt{1-x}$:
   Calculer la limite en 0 de : $g(x)=-2\ln(x)\sqrt{1-x}+2\ln\left(1-\sqrt{1-x}\right)$, puis de $F(x)$.
7. Calculer $I_{\varepsilon,a}$. En déduire la valeur de I.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $\forall x\in[0,1], f'(x)>0$, $f(0)=0$ et $f(1)=1$

1. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis que

$$f\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leq 1-\frac{a}{\sqrt{n}}$$

   Où $a\in\mathbb{R}^{+*}$ est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer.

2.

   Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx=0$$

   On pourra poser

$$I_n=\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(f(x)\right)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n=\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\left(f(x)\right)^n dx$$

   Et montrer que ces deux intégrales tendent vers 0.

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soit φ la fonction réelle définie sur R par:

$$\varphi(0)=0 \text{ et } \varphi(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \text{pour } x \text{ non nul}$$

et pour tout entier naturel $n\in N$, soit u_n la fonction réelle définie par :

$$u_n(x)=\frac{1}{x^n}\varphi(x)=\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \text{pour } x \text{ non nul}$$

Première partie

1. Prouver que:
   $\lim_{x\to0}u_n(x)=0$ pour tout n entier naturel
2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que la dérivée φ' est continue et vérifie :
   $\varphi'(0)=0$ et $\varphi'(x)=2u_3(x)$ pour x non nul
   En déduire la relation
   $2\varphi(x)=x^3\varphi'(x)$ pour tout x réel (1)
3. Etudier les variations de φ et tracer sommairement sa courbe représentative, en précisant les points d'inflexion éventuels.

Deuxième partie

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x\varphi(t)dt$$

4. Montrer que f est impaire.
5. Montrer que pour $x > 0$, on a :

$$0 \leq \int_0^x \varphi(t)dt \leq xe^{-\frac{1}{x^2}} \qquad (2)$$

6. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
7. Pour tout x non nul, montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée $f'(x)$.
8. En utilisant (1), montrer que pour tout $x \geq 0$, on a la relation:

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{x^3}{2}\varphi(x) - \frac{3}{2}\int_0^x t^2\varphi(t)dt \qquad (3)$$

En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$

9. Pour x non nul, calculer la limite de $\frac{f(x)}{x^3}$ lorsque x tend vers 0. (On pourra appliquer la règle de l'Hospital au quotient $\frac{F(x)}{G(x)}$ où $F(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ et $G(x) = x^3\varphi(x)$).

En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Allez à : Correction exercice 33

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

Remarque :

Si on coupe l'intervalle en n partie égale, une somme de Riemann associe à f sur $[a, b]$ est

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

Si $a = 0$, $b = 2$ et $f(x) = x$.

De plus

$$S_n = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{4}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = 2\frac{n+1}{n} \to 2 = \int_0^2 xdx$$

1. Cela ne semble pas être bon, vérifions le

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} i = \frac{1}{n} \times \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n + 1 \to +\infty$$

Cette somme ne tend pas vers 2, ce n'est pas une somme de Riemann de f sur I.

2. Vu ainsi cela ne ressemble pas à la remarque préliminaire, pourtant, en utilisant le 1°), la somme est équivalente à celle-ci-dessus diviser par n et donc tend vers 2. Cela ne suffit pas à dire qu'il s'agit d'une somme de Riemann de f sur I, mais on va regarder de plus près.

On coupe l'intervalle en $2n$ partie égale

$$S_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f\left(a + i\frac{b-a}{2n}\right) = \frac{2}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f\left(i\frac{2}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} i\frac{2}{2n} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{n^2}$$

C'est bon.

3. D'après la remarque préliminaire

$$S_n = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = S_n = 4\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$$

Donc $2\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$ n'est pas une somme de Riemann de f sur I.

Remarque :

On aurait aussi pu calculer la limite de $2\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$ et voir qu'elle valait $1 \neq 2$.

4. Oui, voir la remarque préliminaire.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. Le résultat du cours est :
   « si f est une fonction positive ou nulle, intégrable sur $[a,b]$ avec $a<b$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ »
   $-f$ est une fonction positive ou nulle sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \big(-f(t)\big)dt \geq 0$, ce qui équivaut à $-\int_0^1 f(t)dt \geq 0$, d'où l'on déduit que $\int_0^1 f(t)dt \geq 0$.
2. $$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq 0$$
   C'est faux.
3. Dans l'intégrale
   $$\int_{-1}^1 f(t)dt$$
   On fait le changement de variable $u=-t \Leftrightarrow t=-u \Rightarrow dt=-du$
   $$t=-1 \Rightarrow u=1$$
   $$t=1 \Rightarrow u=-1$$
   $$\int_{-1}^1 f(t)dt = \int_1^{-1} f(-u)(-du) = \int_1^{-1} -f(u)(-du) = \int_1^{-1} f(u)du = -\int_{-1}^1 f(u)du = -\int_{-1}^1 f(t)dt$$
   La première égalité est le changement de variable, la seconde vient du fait que f est impair, la troisième est la simplification du produit de deux signes négatifs, la quatrième vient de l'interversion des bornes et la cinquième vient du fait que la variable d'intégration est une variable « muette » (on peut lui donner n'importe quel nom).
   D'où l'on déduit que
   $$2\int_{-1}^1 f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 f(t)dt = 0$$
   C'est vrai.
4. Prenons la fonction constante égale à 2.
   $$\int_0^1 2dt = [2t]_0^1 = 2 > 1$$
   C'est faux
5. Prenons la fonction constante égale à $\frac{3}{4} < 1$
   $$\int_{-1}^1 \frac{3}{4}dt = \left[\frac{3t}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} > 1$$
   C'est faux.
6. $$\forall x \in [-1,1], f(t) \leq 2 \Rightarrow \int_{-1}^1 f(t)dt \leq \int_{-1}^1 2dt \Rightarrow \int_{-1}^1 f(t)dt \leq [2t]_{-1}^1 = 2-(-2) = 4$$
   C'est vrai.
7. $$\int_{-1}^1 f(x)dx \leq \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$
   Car $x \to x^3$ est impair et d'après la question 3°). Rien n'empêche de faire le calcul directement.
   C'est vrai.
8. D'après la formule de la moyenne il existe $x \in [0,1]$ tel que
   $$f(x) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = y$$
   C'est vrai.
9. D'après la formule de la moyenne il existe $x \in [-1,1]$ tel que
   $$f(x) = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(t)dt = \frac{1}{2}y$$

Cela ne marche pas. On va chercher un contre-exemple, cherchons un truc simple, la fonction constante égale à $\frac{y}{2}$, $\int_{-1}^{1}\frac{y}{2}dt=\left[\frac{yt}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{y}{2}-\left(-\frac{y}{2}\right)=y$ et pourtant $\frac{y}{2}\neq 2y$ sauf pour $y=0$, c'est encore raté.
Prenons $f(t)=\frac{3}{2}yt^2$

$$\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}yt^2dt=\frac{3}{2}\left[\frac{yt^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{3}-\left(-\frac{y}{3}\right)\right)=\frac{3}{2}\times\frac{2y}{3}=y$$

Si $t\in[-1,1]$ alors $t^2\in[0,1]$ et donc $\left|\frac{3}{2}yt^2\right|\le\frac{3}{2}|y|$ ce qui montre que $-\frac{3}{2}|y|<f(t)<\frac{3}{2}|y|$, $\forall t\in[-1,1], f(t)\neq y$. Il a fallu faire intervenir la valeur absolue car on ne sait pas si y est positif ou négatif.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Une fonction en escalier non continue est intégrable. C'est faux.
2. Si $a=0$, $b=1$, $f(x)=0$ pour $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},1\right]$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.
   Supposons qu'il existe une primitive de f sur $[0,1]$ qui vérifie, $F(1)=0$.
   Sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right[$, les primitives de la fonction continue f sont les constantes, $F(x)=k_1$.
   Sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2},1\right]$, les primitives de la fonction continue f sont les constantes, $F(x)=k_2$.
   Pour que $F(1)=0$ on doit prendre $k_2=0$.
   Le problème est en $\frac{1}{2}$, on veut que
   $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{F(x)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$$
   Si x tend vers $\frac{1}{2}$ avec $x>\frac{1}{2}$,
   $$\frac{F(x)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\frac{-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$$
   Lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$, avec $x>\frac{1}{2}$, le dénominateur tend vers 0^+, comme le numérateur est constant donc la limite ne peut pas être égale à 1. (on aurait pu faire le même raisonnement sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$).
   C'est faux.
3. Soit F définie par
   $$F(x)=-\int_x^b f(t)dt$$
   $$F'(x)=-\big(-f(x)\big)=f(x)$$
   F est une primitive de f. De plus $F(b)=-\int_b^b f(t)dt=0$
   C'est vrai.
4. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$, Soit $M=\sup_{x\in[a,b]}|F(x)|\ge 0$
   G définie par $G(x)=F(x)+2M+1$ est aussi une primitive de f
   $$-M\le F(x)\le M\Rightarrow M+1\le F(x)+2M+1\le 3M+1\Rightarrow 0<M+1\le G(x)$$
   $G(x)$ n'est jamais nulle, c'est faux.
5. Par la définition une primitive de f sur $[a,b]$ est une fonction F qui vérifie $\forall x\in[a,b], F'(x)=f(x)$
   C'est vrai, et même sur $[a,b]$.
6. Soit f définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ sur $]0,1[$. f est continue. Les primitives de f sont de la forme
   $$F(x)=\ln(x)+k,\quad k\in\mathbb{R}$$
   Ces fonctions ne sont même pas définies en 0, donc certainement pas continues.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$, Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} |F(x)| \geq 0$
   G définie par $G(x) = F(x) - 2M - 1$ est aussi une primitive de f
   $$-M \leq F(x) \leq M \Rightarrow -3M - 1 \leq F(x) - 2M - 1 \leq -M - 1 \Rightarrow G(x) \leq -M - 1 < 0$$
   Donc c'est faux.

Remarque :

Il ne faut pas confondre avec le résultat suivant : Si $a < b$ et si $f(x) \leq 0$ sur $[a,b]$ alors
$$\int_a^b f(t)dt \leq 0$$

2. Soit F une primitive de f sur un intervalle I. $F'(x) = f(x) \leq 0$ donc F est décroissante.
   C'est vrai.
3. Si pour toute fonction F continue sur $[a,b]$, il existe f continue telle que $\forall x \in [a,b], F'(x) = f(x)$ cela pose un problème cela voudrait que toutes les fonctions continues sont de classes C^1, ce qui est faux, trouvons un contre-exemple.
   Soit $F(x) = |x|$ sur $[-1,1]$, autrement dit $F(x) = -x$ sur $[-1,0]$ et $F(x) = x$ sur $[0,1]$, cette fonction est continue, si $x < 0$, $F'(x) = -1$ et si $x > 0$, $F'(x) = 1$. Les limites à gauche et à droite de $F'(x)$ en 0 sont différentes donc F n'est même pas dérivable en 0, ce n'est pas la primitive d'une fonction continue.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt$	
$u'(t) = \sin(nt)$	$u(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$
$v(t) = f(t)$	$v'(t) = f'(t)$
$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\,f'(t)\right]_a^b -$	$\int_a^b \left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right) f'(t)dt$

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\,f'(t)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt$$
$$= -\frac{1}{n}\cos(nb)\,f'(b) + -\frac{1}{n}\cos(na)\,f'(a) + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt$$
$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |\cos(nt)\,f'(t)|dt \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt$$

Car $|f'|$ est continue donc intégrable.
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt = 0$$
Par conséquent
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)\,f'(t)dt = 0$$
Comme
$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\cos(nb)\,f'(b) + -\frac{1}{n}\cos(na)\,f'(a)\right) = 0$$
On a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

2.
$$\int_\alpha^\beta \sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_\alpha^\beta = -\frac{1}{n}\cos(n\beta) + -\frac{1}{n}\cos(n\alpha) \to 0$$
Soit χ une fonction en escalier sur $[a,b]$, il existe $t_0, t_1, \dots, t_p$ et $y_0, y_1, \dots, y_{p-1}$ tels que

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p-1} < t_p = b$$

Les valeurs de χ en t_i n'ont pas d'importance.
Et

$$\forall i \in \{0,1,\dots,p-1\}, \forall t \in]t_i, t_{i+1}[, \chi(t) = y_i$$

Par conséquent

$$\int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} y_i \sin(nt)\,dt = \sum_{i=0}^{p-1} y_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin(nt)\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} y_i \left(-\frac{1}{n}\cos(nt_{i+1}) + \frac{1}{n}\cos(nt_i)\right) \to 0$$

Car une somme finie de termes qui tendent vers 0 tend vers 0.

3. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction en escalier χ telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - \chi(t)| < \epsilon$

$$\left|\int_a^b \big(f(t) - \chi(t)\big)\sin(nt)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t) - \chi(t)| \times |\sin(nt)| dt \le \int_a^b \epsilon dt = \epsilon(b-a)$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt$$

Pour le ϵ choisit ci-dessus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$

$$\left|\int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt\right| < \epsilon$$

or

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \int_a^b \big(f(t) - \chi(t) + \chi(t)\big)\sin(nt)\,dt$$

$$= \int_a^b \big(f(t) - \chi(t)\big)\sin(nt)\,dt + \int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt$$

Donc

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt\right| \le \left|\int_a^b \big(f(t) - \chi(t)\big)\sin(nt)\,dt\right| + \left|\int_a^b \chi(t)\sin(nt)\,dt\right| \le \epsilon(b-a) + \epsilon$$

Cela montre bien que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1. Pour tout $i = 1, \dots, n$, $]a_{i-1}, a_i[$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, il contient des rationnels donc un rationnel que l'on nomme x_i, par conséquent $f(x_i) = 1$ et des irrationnels donc un irrationnels (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) que l'on nomme y_i par conséquent $f(y_i) = 0$.
2.

$$S_{D_1}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= -a_0 + a_n = 0 + 1 = 1$$

$$S_{D_2}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \times (a_i - a_{i-1}) = 0$$

3.

$$L(f,D) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-i}) \inf_{a_{i-1}\le x\le a_i} f(x) \le S_{D_2}(f) = 0 \Rightarrow \sup_D L(f,D) \le 0$$

$$U(f,D)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-i})\sup_{a_{i-1}\leq x\leq a_i} f(x) \geq S_{D_1}(f)=1\Rightarrow \inf_D U(f,D)\geq 1$$

$$\sup_D L(f,D)\neq \inf_D U(f,D)$$

f n'est pas intégrable.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. Soit $D_1=\{a_0,a_1,\dots,a_n\}$ avec $\alpha=a_0<a_1<\dots<a_{n-1}<a_n=\beta$
   Soit $D_2=\{b_0,b_1,\dots,b_m\}$ avec $\alpha=b_0<b_1<\dots<b_{m-1}<b_m=\beta$
   Soient $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ et $y_0,y_1,\dots,y_{m-1}$
   On définit deux fonctions en escalier
   $$\forall i\in\{1,2,\dots,n\},\forall x\in\left]a_{i-1},a_i\right[,\qquad f_1(x)=x_i$$
   $$\forall j\in\{1,2,\dots,m\},\forall x\in\left]b_{j-1},b_j\right[,\qquad f_2(x)=y_j$$
   Et peu importe les valeurs de f pour $x=a_i$ et de g pour $x=b_i$
   Soit $D=D_1\cup D_2$, il s'agit d'un ensemble fini donc il existe $c_0,c_1,\dots,c_p$ tels que $D=\{c_0,c_1,\dots,c_p\}$ et
   $$\alpha=c_0<c_1<\dots<c_p=\beta$$
   S'il existe $k\in\{1,2,\dots,p\}$ et $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$ tels que $c_{k-1}<a_{i_0}<c_k$ il y a une contradiction car cela signifie que $a_{i_0}\notin D$ or $a_{i_0}\in D_1\subset D$. De même il n'existe pas de b_{j_0} entre deux c_k.
   Par conséquent pour tout $\in\{1,2,\dots,p\}$, il existe $i\in\{1,2,\dots,n\}$ $]c_{k-1},c_k[\subset]a_{k-1},a_k[$ et il existe $j\in\{1,2,\dots,m\}$ tel que $]c_{k-1},c_k[\subset \left]b_{j-1},b_j\right[$.
   On déduit de cela que pour tout $k\in\{1,2,\dots,p\}$ et pour tout $x\in]c_{k-1},c_k[$, $f_1(x)=x_i$ et $f_2(x)=y_j$ et donc
   $$f_1(x)f_2(x)=x_iy_j$$
   Cela montre que $f_1\times f_2$ est une fonction en escalier.
2. C'est faux, si on prend la fonction constante égale à 2 sur $[0,1]$, $\forall x\in[0,1],\ f(x)=2$
   $$f\circ f(x)=f\big(f(x)\big)=f(2)$$
   Mais f n'est pas définie pour $x=2$.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

f est intégrable (donc bornée), pour tout $\epsilon>0$, il existe une fonction en escalier χ telle que
$$\sup_{[a,b]}|f(x)-\chi(x)|\leq\epsilon$$
D'après l'inégalité triangulaire
$$\big||A|-|B|\big|\leq|A-B|$$
Donc
$$\big||f(x)|-|\chi(x)|\big|\leq|f(x)-\chi(x)|$$
Ce qui entraine que pour tout $\epsilon>0$, il existe une fonction en escalier (donc intégrable) telle que
$$\sup_{[a,b]}\big||f(x)|-|\chi(x)|\big|\leq\sup_{[a,b]}|f(x)-\chi(x)|<\epsilon$$
Ce qui montre que $|f|$ est intégrable.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

Remarque :

Une combinaison linéaire de fonctions continues et nulle en a est évidemment une fonction continue nulle en a donc $C_a([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ (on aurait pu dire des fonctions définies sur $[a,b]$).
Une combinaison linéaire de fonction en escalier est évidemment une fonction continues par morceaux donc $\mathcal{E}_0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.
C'est ce qui justifie la question 1.

1. Il n'y a qu'à montrer que l'intersection est réduite au vecteur nulle (donc l'application nulle sur $[a,b]$ notée $\theta_{[a,b]}$). Soit $f \in C_a([a,b]) \oplus \mathcal{E}_0$
Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et $f(a) = 0$ d'une part et f est une fonction en escalier d'autre part.
Une fonction continue et en escalier sur $[a,b]$ est constante (C'est assez évident pour pouvoir l'affirmer), comme $f(a) = 0$ cette constante est nulle, par conséquent $f = \theta_{[a,b]}$, on a bien
$$C_a([a,b]) \cap \mathcal{E}_0 = \{\theta_{[a,b]}\}$$
2. On appelle E l'espaces de fonctions continues par morceaux, il faut montrer que
$$C_a([a,b]) \oplus \mathcal{E}_0 = E$$

Remarque :

On ne peut pas utiliser le résultat sur les dimensions de $C_a([a,b])$ et de $\mathcal{E}_0$ car ces espaces vectoriels sont de dimension infini.
On va montrer que toute fonction f dans E se décompose en une somme d'une fonction g dans $C_a([a,b])$ et d'une fonction h dans $\mathcal{E}_0$ pour montrer que
$$C_a([a,b]) + \mathcal{E}_0 = E$$
Comme
$$C_a([a,b]) \cap \mathcal{E}_0 = \{\theta_{[a,b]}\}$$
On aura bien
$$C_a([a,b]) \oplus \mathcal{E}_0 = E$$

Allez à : Exercice 9

Première partie

On va d'abord considérer une fonction f qui n'admet qu'un point de discontinuité en $c \in [a,b]$.
Si $c \in]a,b[$. On appelle
$$f(c^-) = \lim_{x\to c^-} f(x) \quad \text{et} \quad f(c^+) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$
$$g: x \in [a,b] \to \begin{cases} f(x) - f(a) & \text{si} \quad a \le x < c \\ f(c^-) - f(a) & \text{si} \quad x = c \\ f(x) + f(c^-) - f(c^+) - f(a) & \text{si} \quad c < x \le b \end{cases}$$
$$a \in [a,c[\Rightarrow g(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) - f(a) = l_1 - f(a) = f(c)$$
$$\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) + f(c^-) - f(c^+) - f(a) = f(c^+) + f(c^-) - f(c^+) - f(a) = f(c^-) - f(a) = g(c)$$
g est continue en c, et pour $x \in [a,c[\cup]c,b]$ g est continue car f est continue sur $[a,c[$ et sur $]c,b]$.
Bref g est continue sur $[a,b]$ et $g(a) = 0$, autrement dit $g \in C_a([a,b])$.
Soit
$$h: [a,b] \to \begin{cases} f(a) & \text{si} \quad a \le x < c \\ f(a) - f(c^-) + f(c) & \text{si} \quad x = c \\ -f(c^-) + f(c^+) + f(a) & \text{si} \quad c \le x \le b \end{cases}$$
h est une fonction en escalier, $h \in E$.

$$\forall\in [a,b], g(x)+h(x)=\begin{cases} f(x)-f(a)+f(a) & \text{si} \quad a\le x<c \\ f(c^-)-f(a)+f(a)-f(c^-)+f(c) & \text{si} \quad x=c \\ f(x)+f(c^-)-f(c^+)-f(a)-f(c^-)+f(c^+)+f(a) & \text{si} \quad c<x\le b \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad a\le x<c \\ f(c) & \text{si} \quad x=c \\ f(x) & \text{si} \quad c<x\le b \end{cases} = f(x)$$

On a montré l'existence de deux fonctions g dans $C_a([a,b])$ et d'une fonction h dans $\mathcal{E}_0$ telles que $f = g+h$.
C'est bien ce que l'on voulait.
Pour $c=a$ ou $c=b$ la méthode précédente ne marche pas tout-à-fait mais on peut l'adapter facilement.
Allez à : Exercice 9
Deuxième partie
On considère maintenant une fonction discontinue en deux points c et d, on appelle

$$f(d^-)=\lim_{x\to d^-} f(x) \quad \text{et} \quad f(d^+)=\lim_{x\to d^+} f(x)$$

$$g: x\in[a,b]\to\begin{cases} f(x)-f(a) & \text{si} \quad a\le x<c \\ f(c^-)-f(a) & \text{si} \quad x=c \\ f(x)+f(c^-)-f(c^+)-f(a) & \text{si} \quad c<x<d \\ f(d^-)+f(c^-)-f(c^+)-f(a) & \text{si} \quad x=d \\ f(x)+f(d^-)-f(d^+)+f(c^-)-f(c^+)-f(a) & \text{si} \quad d<x\le b \end{cases}$$

Et

$$h: [a,b]\to\begin{cases} f(a) & \text{si} \quad a\le x<c \\ f(a)-f(c^-)+f(c) & \text{si} \quad x=c \\ -f(c^-)+f(c^+)+f(a) & \text{si} \quad c<x<d \\ f(d)-f(d^-)-f(c^-)+f(c^+)+f(a) & \text{si} \quad x=d \\ -f(d^-)+f(d^+)-f(c^-)+f(c^+)+f(a) & \text{si} \quad d<x\le b \end{cases}$$

Je laisse au lecteur qui me lit encore le soin de vérifier que $g(a)=0$, que g est continue sur $[a,b]$, que h est une fonction en escalier (çà c'est trivial) et que $f=g+h$. Faire cela pour n points de discontinuités me parait bien compliqué à écrire, alors je vais faire une récurrence
Allez à : Exercice 9
Troisième partie
Soit f une fonction discontinue en n points notés $c_1<c_2<\cdots<c_n$, avec $a<c_1$ et $c_n<b$, on note

$$I_1=[a,c_1[;\ \ I_2=]c_1,c_2[;\ldots;I_n=]c_{n-1},c_n[;I_{n+1}=]c_n,b]$$

$$\forall i\in\{1,n+1\},\forall x\in[a,b], f_i(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\in I_i \\ 0 & \text{si} \quad x\notin I_i \end{cases}$$

Et f_i est nulle aux points de discontinuités (c'est juste pour simplifier la fin du raisonnement, on pourrait donner n'importe quelle valeurs aux points de discontinuités).
Toutes ces fonctions sont continues par morceaux.
Supposons que pour tout $k\in\{1,\ldots,n+1\}$, $f_1+\cdots+f_k$ est la somme d'une fonction $g_k\in C_a([a,b])$ et d'une fonction $h_k\in E$ telles que $f_1+\cdots+f_k=g_k+h_k$, on appelle (H_k) cette proposition
f_1 est une fonction continue par morceaux, avec un seul point de discontinuité en c_1, d'après la première partie il existe deux fonctions g_1 dans $C_a([a,b])$ et d'une fonction h_1 dans $\mathcal{E}_0$ telles que $f_1=g_1+h_1$.
Montrons que (H_k) entraine (H_{k+1})

$$f_1+\cdots+f_k+f_{k+1}=(f_1+\cdots+f_k)+f_{k+1}$$

D'après (H_k) $f_1+\cdots+f_k=g_k+h_k$ où fonction $g_k\in C_a([a,b])$ et d'une fonction $h_k\in E$.

$$f_1+\cdots+f_k+f_{k+1}=g_k+h_k+f_{k+1}=(g_k+f_{k+1})+h_k$$

g_k+f_{k+1} est la somme d'une fonction continue et d'une fonction continue par morceaux, c'est donc une fonction continue par morceaux, f_{k+1} est discontinue en c_{k-1} et en c_k, donc g_k+f_{k+1} aussi, d'après la deuxième partie, on en déduit que g_k+f_{k+1} est la somme d'une fonction g_{k+1} continue sur $[a,b]$, nulle en a, et d'une fonction h_{k+1} en escalier,

$$f_1+\cdots+f_k+f_{k+1}=(g_k+f_{k+1})+h_k=g_{k+1}+h_{k+1}$$

La récurrence est montrée, on l'applique à $k=n+1$

$$f_1+\cdots+f_{n+1}=g_{n+1}+h_{n+1}$$

On a presque fini, pour tout $x\in[a,b]$, avec $x\neq c_i$ on a

$$f(x)=f_1(x)+\cdots+f_{n+1}(x)$$

Soit H la fonction définie par

$$\begin{cases}H(x)=0 \quad \text{si} \quad x\neq c_i\\ H(c_i)=f(c_i)\end{cases}$$

Donc pour tout $x\in[a,b]$

$$f(x)=g_{n+1}(x)+h_{n+1}(x)+H(x)$$

$h_{n+1}+H$ est une fonction en escalier et g_{n+1} est continue sur $[a,b]$ et nulle en a. C'est fini, il ne reste plus qu'à conclure. On vient de montrer que

$$C_a([a,b])+\mathcal{E}_0=E$$

Comme

$$C_a([a,b])\cap\mathcal{E}_0=\{\theta_{[a,b]}\}$$

On a bien

$$C_a([a,b])\oplus\mathcal{E}_0=E$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

Remarque préliminaire, si f est intégrable

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

$$S_{1,n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Avec $f(x)=\frac{1}{1+x}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}S_{1,n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=[\ln(1+x)]_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

$$S_{2,n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Avec $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2,n}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

Dans cet exercice k ne varie pas de 0 (ou 1) à $n-1$ (ou n), il faut faire attention.

On pose $k'=k-n\Leftrightarrow k=k'+n$

$$k=n\Rightarrow k'=0$$

$$k=2n-1\Rightarrow k'=n-1$$

$$S_{3,n}=n\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k^2}=n\sum_{k'=0}^{n-1}\frac{1}{(k'+n)^2}$$

Ensuite rien n'empêche de renommer k' en k.

$$S_{3,n}=n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+n)^2}=n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2\left(\frac{k}{n}+1\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}+1\right)^2}=S_{2,n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_{3,n}=\frac{1}{2}$$

$$S_{4,n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2k}{n}\right)}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Avec $f(x)=\frac{1}{1+2x}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_{4,n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(1) = \ln\left(\sqrt{3}\right)$$

Dans cet exercice k ne varie pas de 0 (ou 1) à $n-1$ (ou n), il faut faire attention.

$$S_{5,n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2\left(\frac{k^2}{n^2}+1\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1}$$

Allez à : Exercice 10

Première méthode :

Attention cette dernière expression ne donne rien, si on coupe l'intervalle $[0,1]$ en n segments égaux la somme doit aller de 0 (ou 1) à $n-1$ (ou n) cela ne va pas, si on coupe l'intervalle $[0,2]$ en n segments égaux le pas de la subdivision est $\frac{2}{n}$ cela ne va pas non plus car on devrait voir apparaitre $f\left(\frac{2k}{n}\right)$ dans la somme , si on coupe l'intervalle $[0,2]$ en $2n$ segments égaux le pas de la subdivision le pas est $\frac{k}{n}$ et la somme va de 0 (ou 1) à $2n-1$ (ou $2n$), c'est mieux mais le « $\frac{b-a}{n}$ » devant la somme devient $\frac{b-a}{2n} = \frac{2-0}{2n} = \frac{1}{n}$,

$$S_{5,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1} \to \int_0^2 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(1) = \ln\left(\sqrt{5}\right)$$

Allez à : Exercice 10

Deuxième méthode

On coupe l'intervalle $[0,1]$ en $2n$ segments égaux, le pas de la subdivision est $\frac{1}{2n}$, il faut arranger la forme de cette somme :

$$S_{5,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{2\times\frac{k}{2n}}{4\times\left(\frac{k}{2n}\right)^2+1}$$

Le « $\frac{b-a}{n}$ » devant la somme devient $\frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{2n} = \frac{1}{2n}$

$$S_{5,n} = \frac{1}{n}\times\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{2n}}{\left(\frac{k}{2n}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{2n}}{\left(\frac{k}{2n}\right)^2+\frac{1}{4}} \to \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\times 4\right) = \ln\left(\sqrt{5}\right)$$

$$S_{6,n} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{k}{n}\right)}} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1-\frac{k}{n}}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1-\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Avec $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_{6,n} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

On fait le changement de variable.

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow t^2(1+x) = 1-x \Leftrightarrow t^2+xt^2 = 1-x \Leftrightarrow x+xt^2 = 1-t^2$$

$$\Leftrightarrow x(1+t^2) = 1-t^2 \Leftrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-2t(1-t^2)-(1+t^2)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int_1^0 t \times \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^1 \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

On décompose cette fraction en éléments simples

$$\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{(1+t^2)^2}$$

Une petite ruse permet de ne pas se fatiguer

$$\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 4\frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2} = 4\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = 4\int_0^1 \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)dt = 4[\arctan(t)]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \pi - 4\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Dans cette dernière intégrale on fait le changement de variable $t = \tan(\theta) \Leftrightarrow \theta = \arctan(t)$

$$dt = (1+\tan^2(\theta))d\theta$$

$$t = 0 \Rightarrow \theta = \arctan(0) = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2(\theta))d\theta}{\left((1+\tan^2(\theta))\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+\tan^2(\theta)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) - 0 - \frac{1}{2}\sin(0)\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} S_{6,n} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \pi - 4\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

Pour $t \in [0,1[$, $t^n \to 0$ donc $\frac{e^t}{1+t^n} \to e^t$ mais on n'a pas le droit d'écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{e^t}{1+t^n}dt = \int_0^1 e^t dt = e-1$$

Mais on va essayer de le montrer, c'est un peu technique.

Pour tout $\epsilon > 0$

$$\left|\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt - \int_0^1 e^t dt\right| = \left|\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+t^n} - e^t\right)dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right|$$

$$= \left|\int_0^{1-\frac{\epsilon}{2e}} \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt + \int_{1-\frac{\epsilon}{2e}}^1 \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right| \le \left|\int_0^{1-\frac{\epsilon}{2e}} \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right| + \left|\int_{1-\frac{\epsilon}{2e}}^1 \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right|$$

Dans la première intégrale on majore t^n par $\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^n$, e^t par e et au dénominateur on minore t^n+1 par 1.

$$\left|\int_0^{1-\frac{\epsilon}{2e}} \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right| \le \int_0^{1-\frac{\epsilon}{2e}} \frac{\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^n e}{1}dt = \left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^{n+1} e$$

Dans la seconde intégrale on majore t^n par 1, e^t par e et au dénominateur on minore $1+t^n$ par 1

$$\left|\int_{1-\frac{\epsilon}{2e}}^1 \frac{t^n e^t}{1+t^n}dt\right| \le \int_{1-\frac{\epsilon}{2e}}^1 \frac{e}{1}dt = e\left(1-\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)\right) = \frac{\epsilon}{2}$$

Ensuite on choisit n telle que

$$\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^{n+1} e \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Comme $0 < 1 - \frac{\epsilon}{2e} < 1$ (On a choisit ϵ pour qu'il soit aussi petit que possible donc on peut s'arranger pour que $0 < 1 - \frac{\epsilon}{2e}$) par conséquent

$$\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^{n+1} \to_{n\to+\infty} 0$$

Ensuite on choisit $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > N$

$$\left(1-\frac{\epsilon}{2e}\right)^{n+1} e \leq \frac{\epsilon}{2}$$

On reprend les majorations et pour tout $\epsilon > 0$, il existe N, tel que pour tout $n > N$

$$\left|\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt - \int_0^1 e^t dt\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

C'est la définition de la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 1 \times (1-t^2)^n dt$

$\int_0^1 1 \times (1-t^2)^n dt$	
$u'(t) = 1$	$u(t) = t$
$v(t) = (1-t^2)^n$	$v'(t) = -2nt(1-t^2)^{n-1}$
$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = [t(1-t^2)^n]_0^1 -$	$\int_0^1 t(-2nt(1-t^2)^{n-1})dt$

Pour $n \geq 1$, $[t(1-t^2)^n]_0^1 = 0$

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = -2n\int_0^1 (-t^2)(1-t^2)^{n-1}dt = t(1-t^2)^n - 2n\int_0^1 (1-t^2-1)(1-t^2)^{n-1}dt$$

$$= -2n\int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{n-1}dt + 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}dt = -2nI_n + 2nI_{n-1}$$

Donc

$$(2n+1)I_n = 2nI_{n-1} \Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

C'est raté, cela donne une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, ce n'est pas grave, pour $n \geq 0$:

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}I_n$$

2.

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3}I_{n-3}$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \dots \times \frac{2n-2k+2}{2n-2k+3}I_{n-k}$$

Or

$$I_{n-k} = \frac{2(n-k)}{2(n-k)+1}I_{n-k-1} = \frac{2n-2k}{2n-2k+1}I_{n-k-1}$$

Donc

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \dots \times \frac{2n-2k+2}{2n-2k+3} \times \frac{2n-2k}{2n-2k+1}I_{n-k-1}$$

On prend $k = n$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} \times \dots \times \frac{2}{3}I_0$$

Et

$$I_0=\int_0^1(1-t^2)^0dt=1$$

$$I_n=\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\frac{2n-4}{2n-3}\times\dots\times\frac{2}{3}$$

Pour faire joli :

$$I_n=\frac{[2n\times 2(n-1)\times 2(n-2)\times\dots\times 2\times 1]^2}{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\dots\times 3\times 2}=\frac{[2^n\times n!]^2}{(2n+1)!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

En multipliant en haut et en bas par :

$$2n\times 2(n-1)\times 2(n-2)\times\dots\times 2(1)=2n\times(2n-2)\times(2n-4)\times\dots\times 2$$

3.

$$\int_0^1(1-t^2)^ndt=\int_0^1\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}1^{n-k}(-t^2)^k\,dt=\sum_{k=0}^n\left(\binom{n}{k}\int_0^1(-t^2)^kdt\right)=\sum_{k=0}^n\left(\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1t^{2k}dt\right)$$

$$=\sum_{k=0}^n\left(\binom{n}{k}(-1)^k\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1\right)=\sum_{k=0}^n\left(\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\right)=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$$

D'après 2.

$$I_n=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. Le problème est qu'apparemment il n'y a qu'une fonction, si on fait comme « d'habitude » c'est-à-dire que l'on intègre le « 1 » on va faire apparaître un « t » qui ne donnera rien de bon, la bonne idée c'est d'écrire I_{n+2} de la façon suivante :

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\sin^{n+1}(t)\,dt$$

$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\sin^{n+1}(t)\,dt$	
$u'(t)=\sin(t)$	$u(t)=-\cos(t)$
$v(t)=\sin^{n+1}(t)$	$v'(t)=(n+1)\sin^n(t)\cos(t)$
$I_n=[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}-$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos(t))(n+1)\sin^n(t)\cos(t)\,dt$

$$I_{n+2}=[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\cos^2(t)\,dt$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)\sin^{n+1}(0)+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\left(1-\sin^2(t)\right)dt$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,dt-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}(t)\,dt=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$$

Donc

$$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n\Rightarrow I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$$

2. On pose $n=2p-2$,

$$I_{2p}=\frac{2p-1}{2p}I_{2p-2}=\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}I_{2p-4}=\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\dots\times\frac{1}{2}I_0$$

En fait il faudrait faire une récurrence (mais c'est assez évident).

Et

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0(t)\ dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2p}=\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\dots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

On pose $n=2p-1$

$$I_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}I_{2p-1}=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}I_{2p-3}=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\dots\times\frac{2}{3}I_1$$

Et

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1(t)\ dt=[-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)=1$$

$$I_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\dots\times\frac{2}{3}$$

3. Pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$0\le\sin(t)\le 1\Rightarrow 0\le\sin^{n+1}(t)\le\sin^n(t)$$

En intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

$$0<I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}(t)\,dt<I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,dt$$

Ce qui montre que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et décroissante.

4. On déduit de la question précédente que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (décroissante et minorée par 0). Si cette limite est non nulle, c'est fini, $I_n\sim l$ et $I_{n+1}\sim l$ entraine que $I_n\sim I_{n+1}$, seulement voilà pour l'instant rien n'empêche cette limite d'être nulle, auquel cas on ne peut pas conclure que $I_n\sim 0$, et au point où j'en suis j'ai bien l'impression que la limite est nulle (mais rien ne me permet de l'affirmer !).

Reprenons l'égalité $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$

$$0<I_{n+2}<I_{n+1}<I_n\Rightarrow 0<\frac{n+1}{n+2}I_n<I_{n+1}<I_n\Rightarrow 0<\frac{n+1}{n+2}<\frac{I_{n+1}}{I_n}<1$$

En faisant tendre n vers l'infini on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$$

Autrement dit $I_{n+1}\sim I_n$

Remarque :

On ne connait toujours pas la valeur de la limite.

5. On ne connait que I_{2p} et I_{2p+1}, alors on va envisager deux cas, $n=2p$, puis $n=2p-1$.

$n=2p$

$$nI_nI_{n+1}=2pI_{2p}I_{2p+1}=2p\times\left(\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\dots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\frac{2p}{2p+1}\times\frac{2p-2}{2p-1}\times\dots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{2p}{2p+1}\times\frac{\pi}{2}=\frac{n}{n+1}\times\frac{\pi}{2}$$

$n=2p-1$

$$nI_nI_{n+1}=(2p-1)I_{2p-1}I_{2p}$$

$$=(2p-1)\times\left(\frac{2p-2}{2p-1}\times\dots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\dots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{2p-1}{2p}\times\frac{\pi}{2}=\frac{n}{n+1}\times\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$nI_nI_{n+1}=\frac{n}{n+1}\times\frac{\pi}{2}$$

6.

$$nI_nI_{n+1}\sim nI_n^2\qquad et\qquad \frac{n}{n+1}\times\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n} \Rightarrow I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Car $I_n > 0$.

Remarque :

J'ai bien eu raison de me méfier parce que la limite de I_n est bien nulle. (En fait, je le savais mais je ne vous l'avais pas dit pour ménager le suspense).

Commentaires :

Ces intégrales sont connues sous le nom de « intégrales de Wallis »

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Il faut majorer $\frac{x^n}{1+x}$, il y a deux options, soit majorer le numérateur, soit minorer le dénominateur, et on doit pouvoir trouver une primitive du majorant. $x^n \leq 1$, je ne vois pas mieux, et alors
$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq \frac{1}{1+x} \Rightarrow 0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$
Et là on est coincé, il n'y a plus de n, et la valeur à gauche et à droite sont distinctes cela ne donne rien.
On va minorée le dénominateur $\frac{1}{1+x^2}$, il y a deux possibilités :
Pour tout $n \geq 0$
$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+0} = 1 \Rightarrow 0 < I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$$
Donc $I_n \to 0$
Ou
Pour tout $n \geq 1$
$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{0+x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 \frac{x^n}{x} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n} \to 0$$
Donc $I_n \to 0$
Je préfère la première possibilité, mais les deux marchent.

2.
$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n+1}$$

3.
$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}$$
En intégrant entre 0 et 1.
$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}\right) dx$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^{n+1} I_n$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} I_n$$
Or

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\frac{(-1)^0}{0+1}+\frac{(-1)^1}{1+1}+\frac{(-1)^2}{2+1}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln(2)+(-1)^{n+1}I_n\to\ln(2)$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1.

$$I_0=\int_1^e dt=e-1$$

$$I_1=\int_1^e 1\times\ln(t)\,dt$$

A l'aide d'une intégration par partie

$I_1=\int_1^e 1\times\ln(t)\,dt$	
$u'(t)=1$	$u(t)=t$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$I_1=\int_1^e \ln(t)\,dt=[t\ln(t)]_1^e-$	$\int_1^e dt$

$$I_1=e\ln(e)-\ln(1)-(e-1)=1$$

2. pour $n\geq 1$

$I_n=\int_1^e 1\times(\ln(t))^n dt$	
$u'(t)=1$	$u(t)=t$
$v(t)=(\ln(t))^n$	$v'(t)=\frac{n}{t}(\ln(t))^{n-1}$
$I_n=\int_1^e(\ln(t))^n dt=[t(\ln(t))^n]_1^e-$	$n\int_1^e(\ln(t))^{n-1}dt$

$$I_n=e-nI_{n-1}$$

Pour $n\geq 2$

$$I_n=e-nI_{n-1}=e-n(e-(n-1)I_{n-2})=e(1-n)+n(n-1)I_{n-2}$$

3.

$$I_n=e(1-n)+n(n-1)I_{n-2}=e(1-n)+n(n-1)(e-(n-2)I_{n-3})$$
$$=e\big(1-n+n(n-1)\big)-n(n-1)(n-2)I_{n-3}$$
$$=e\big(1-n+n(n-1)\big)+(-1)^3\frac{n!}{(n-2)!}I_{n-3}$$

Montrons par récurrence sur k que

$$I_n=e\Big(1-n+n(n-1)-\cdots+(-1)^{k-1}n(n-1)\ldots(n-k+2)\Big)+(-1)^k\frac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}I_{n-k}$$

$$I_n=e\Big(1-n+n(n-1)-\cdots+(-1)^{k-1}n(n-1)\ldots(n-k+2)\Big)$$
$$+(-1)^k\frac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}\big(e-(n-k)I_{n-(k+1)}\big)$$

$$=e\left(1-n+n(n-1)-\cdots+(-1)^{k-1}n(n-1)\ldots(n-k+2)+(-1)^k\frac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}(n-k)\right)$$
$$-(-1)^k\frac{n!}{\big(n-(k-1)\big)!}(n-k)I_{n-(k+1)}$$

$$= e\left(1 - n + n(n-1) - \cdots + (-1)^{k-1}n(n-1)\dots(n-k+2) + (-1)^k \frac{n!}{(n-(k-1))!}(n-k)\right)$$
$$- (-1)^k \frac{n!}{(n-(k-1))!}(n-k)I_{n-(k+1)}$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

Il faut écrire $\frac{1}{\cos^n(u)}$ en produit de deux fonctions donc on connait une primitive de l'une de ces fonctions. Pour $n \geq 2$.

$$\frac{1}{\cos^n(u)} = \frac{1}{\cos^2(u)} \times \frac{1}{\cos^{n-2}(u)}$$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(u)} \times \frac{1}{\cos^{n-2}(u)} du$	
$f'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}$	$f(u) = \tan(u)$
$g(u) = \frac{1}{\cos^{n-2}(u)} = \cos^{-n+2}(u)$	$g'(u) = (-n+2)\cos^{-n+1}(u)\,(-\sin(u))$
$I_n = \left[\frac{\tan(u)}{\cos^{n-2}(u)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} -$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(u)(-n+2)\cos^{-n+1}(u)\,(-\sin(u))du$

$$I_n = \left[\frac{\tan(u)}{\cos^{n-2}(u)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(u)(-n+2)\cos^{-n+1}(u)\,(-\sin(u))du$$
$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^{n-2}\left(\frac{\pi}{4}\right)} + (-n+2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(u)}{\cos(u)} \frac{1}{\cos^{n-1}(u)} du$$
$$= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^{n-2}\left(\frac{\pi}{4}\right)} + (-n+2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(u)}{\cos^n(u)} du = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2}} - (n-2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2(u)}{\cos^n(u)} du$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} - (n-2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2(u)}{\cos^n(u)} du$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} - (n-2)\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(u)} du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{n-2}(u)} du\right]$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} - (n-2)[I_n - I_{n-2}] = \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

Donc

$$(n-1)I_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} + (n-2)I_{n-2}$$

Par récurrence approximative

$$I_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$
$$I_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-4}}{n-3} + \frac{n-4}{n-3} I_{n-4}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \times \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-4}}{n-3} + \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-4}{n-3} I_{n-4}$$

Si $n = 2p$, par une récurrence (que je n'ai pas envie de faire)

$$I_{2p} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-2}}{2p-1} + \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-4}}{2p-3} + \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{2p-4}{2p-3} \times \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-6}}{2p-5} + \cdots + \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{2p-4}{2p-3} \times \dots$$
$$\times \frac{2}{1} I_0$$

Avec

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\times du=\frac{\pi}{4}$$

Si $n=2p+1$, par une récurrence (que je n'ai pas envie de faire)

$$I_{2p+1}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-1}}{2p}+\frac{2p-1}{2p}\times\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-3}}{2p-2}+\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p-5}}{2p-4}+\cdots+\frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\ldots\times\frac{3}{2}I_1$$

Avec les règles de Bioche on voit que l'on peut faire le changement de variable $t=\sin(u)$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{du}{\cos(u)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(u)\,du}{\cos^2(u)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(u)\,du}{1-\sin^2(u)}$$

On pose $t=\sin(u)\Rightarrow dt=\cos(u)\,du$

$$u=0\Rightarrow t=\sin(0)=0$$

$$u=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(u)\,du}{1-\sin^2(u)}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-t}+\frac{\frac{1}{2}}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}\left[-\ln(1-t)+\ln(1+t)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)-\ln\left(\frac{1}{1}\right)\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

$\int_1^e 1\times(\ln(u))^n du$	
$f'(u)=1$	$f(u)=u$
$g(u)=(\ln(u))^n$	$g'(u)=\frac{n(\ln(u))^{n-1}}{u}$
$J_n=[u\times(\ln(u))^n]_1^e-$	$\int_1^e u\times\frac{n(\ln(u))^{n-1}}{u}du$

$$J_n=[u\times(\ln(u))^n]_1^e-n\int_1^e(\ln(u))^{n-1}du=e\times(\ln(e))^n-1\times(\ln(1))^n-nJ_{n-1}=e-nJ_{n-1}$$

$$\begin{aligned}J_n=e-nJ_{n-1}&=e-n(e-(n-1)J_{n-2})=e(1-n)+n(n-1)J_{n-2}\\&=e(1-n)+n(n-1)(e-(n-2)J_{n-3}\\&=e\big(1-n+n(n-1)\big)-n(n-1)(n-2)J_{n-3}\\&=e\left(\frac{n!}{0!}-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}\right)+(-1)^3n(n-1)(n-2)J_{n-3}\\&=e\left(\frac{n!}{n!}-\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}\right)+(-1)^3\frac{n!}{(n-3)!}J_{n-3}\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur k que :

$$J_n=e\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}J_{n-k}$$

Pour $k=1$, c'est l'égalité $J_n=e-nJ_{n-1}$.

Si

$$J_n=e\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!}+(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}J_{n-k}$$

Alors, comme $J_{n-k}=e-(n-k)J_{n-k-1}$

$$J_n = e\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!} + (-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}\left(e-(n-k)J_{n-k-1}\right)$$
$$= e\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!} + (-1)^{k+1}\frac{n!}{(n-k-1)!}J_{n-k-1}$$
$$= e\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!} + (-1)^{k+1}\frac{n!}{\left(n-(k+1)\right)!}J_{n-(k+1)}$$

La relation est vérifiée donc elle est vraie pour tout k, appliquons ce résultat à $k=n$

$$J_n = e\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!} + (-1)^n\frac{n!}{(n-k)!}J_{n-n} = e\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!} + (-1)^n\frac{n!}{(n-n)!}J_0$$

Avec $J_0 = \int_1^e 1\times du = e-1$

$$J_n = e\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!} + (-1)^n\frac{n!}{(n-k)!}J_{n-n} = e\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!} + (-1)^n\frac{n!}{(n-n)!}(e-1)$$
$$= e\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{(n-i)!} + (-1)^{n+1}n!$$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1.

$$u=-t \Leftrightarrow t=-u \Rightarrow dt=-du$$
$$t=-\pi \Rightarrow u=\pi$$
$$t=\pi \Rightarrow u—\pi$$
$$f(t)=f(-u)=-f(u)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{\pi}^{-\pi}\left(-f(u)\right)(-du) = \int_{\pi}^{-\pi} f(u)du = -\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du = -\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

Par conséquent

$$2\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$$

2. f est continue et $x\to x+2\pi$ est dérivable donc F est dérivable.

$$F'(x) = f(x+2\pi) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$$

F' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc F est constante.

3.

$$\int_{2\pi}^{4\pi} f(t)dt = F(2\pi) = F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$$

La seconde égalité vient du fait que F est constante, la troisième vient du 1.

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1. On pose $f(t)=\ln(1+t)$ pour tout $t>0$. Cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre, donc avec un reste à l'ordre 2.

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} \quad \text{et} \quad f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

Il existe $c\in]0,t[$ tel que

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(c) = t - \frac{t^2}{2}\times\frac{1}{(1+c)^2}$$

Il est clair que $f(t) < t$ et d'autre part

$$0 < c < t \Rightarrow 1 < 1 + c < 1 + t \Rightarrow 1 < (1+c)^2 < (1+t)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+t)^2} < \frac{1}{(1+c)^2} < 1 \Rightarrow \frac{-t^2}{2(1+t)^2} > -\frac{t^2}{2}\frac{1}{(1+c)^2} > -\frac{t^2}{2} \Rightarrow t - \frac{-t^2}{2(1+t)^2} > t - \frac{t^2}{2}\frac{1}{(1+c)^2} > t - \frac{t^2}{2}$$

L'inégalité de droite montre que $\ln(1+t) > t - \frac{t^2}{2}$. On a donc montré les deux inégalités.

2. Pour tout $x \in \left]1, \sqrt{3}\right[$

$$1 < x < \sqrt{3} \Rightarrow 1 < x < x^2 < 3 \Rightarrow 0 < x - 1 < t < x^2 - 1 < 2$$

Comme $t - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}(2 - t)$ est le produit de deux réels positifs ($t > 0$ et $2 - t > 0$), $t - \frac{t^2}{2} > 0$

$$0 < t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{1}{\ln(1+t)} < \frac{1}{t - \frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{t} \le \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{\ln(1+t)} \le \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{t - \frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow [\ln(t)]_{x-1}^{x^2-1} \le F(x) \le \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{-2}{t(t-2)} dt$$

$$\Rightarrow \ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) \le F(x) \le \int_{x-1}^{x^2-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\right) dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) \le F(x) \le [\ln(t) - \ln|t - 2|]_{x-1}^{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) \le F(x) \le \ln(x+1) - \ln|x^2 - 3| + \ln|x - 3| = \ln(1+x) + \ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right)$$

Ce qui est bien l'inégalité demandée.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln\left(\frac{|x-3|}{|x^2-3|}\right) = \ln\left(\frac{|-2|}{|-2|}\right) = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln(1+x) = \ln(2)$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F(x) = \ln(2)$$

3. Pour tout $x > 1$

$$F'(x) = \frac{2x}{\ln(1 + x^2 - 1)} - \frac{1}{\ln(1 + x - 1)} = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

4. $x > 1$ entraine que $x - 1 > 0$ et que $\ln(x) > 1$, donc $F'(x) > 0$, F est une fonction strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et $\lim_{x \to 1} F(x) = \ln(2)$, par conséquent, pour tout $x > 1$, on a $F(x) > \ln(2)$.

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

Première partie

1. Si $x > 1$ alors $x^2 > x$ et si $t \ge x > 1$ alors $\ln(t) > 0$ donc $f(x) > 0$
2.

$$t \to \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$$

Est continue et $x \to x^2$ est dérivable donc f est dérivable.

$$f'(x)=\frac{\ln(x^2)}{(x^2-1)^2}\times 2x-\frac{\ln(x)}{(x-1)^2}=\frac{4x\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}-\frac{\ln(x)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(4x-(x+1)^2)=\frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(4x-x^2-2x-1)$$
$$=-\frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(x^2-2x+1)=-\frac{\ln(x)}{(x+1)^2}$$

3.

a) La formule de Taylor Lagrange pour la fonction ln entre 1 et $t>1$ dit qu'il existe $c\in]1,t[$ tel que

$$\ln(t)=\ln(1)+(t-1)\ln'(1)+\frac{(t-1)^2}{2}\ln''(c)\Leftrightarrow \ln(t)=t-1-\frac{(t-1)^2}{2c^2}$$
$$1<c<t\Leftrightarrow 1<c^2<t^2\Leftrightarrow \frac{1}{t^2}<\frac{1}{c^2}<1\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2}<\frac{(t-1)^2}{2c^2}<\frac{(t-1)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{(t-1)^2}{2}<-\frac{(t-1)^2}{2c^2}<-\frac{(t-1)^2}{2t^2}\Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<t-1-\frac{(t-1)^2}{2c^2}$$
$$<t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}\Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

Comme $t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}<t-1$, on a bien

$$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$

b) On divise par $(t-1)^2>0$

$$\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}<\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}<\frac{1}{t-1}$$

Comme $x<x^2$ on intègre

$$\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\right)dt\le f(x)\le\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt\Leftrightarrow\left[\ln(t-1)-\frac{t}{2}\right]_x^{x^2}\le f(x)\le[\ln(t-1)]_x^{x^2}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x^2-1)-\frac{x^2}{2}-\ln(x-1)+\frac{x}{2}\le f(x)\le \ln(x^2-1)-\ln(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x+1)+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\le f(x)\le\ln(x+1)$$

On fait tendre x vers 1^+ et on trouve que

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\ln(2)$$

Allez à : Exercice 20

Deuxième partie

1.

$$\int\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt=\int\frac{1}{(t-1)^2}\ln(t)\,dt$$

$\int\frac{1}{(t-1)^2}\ln(t)\,dt$	
$u'(t)=\frac{1}{(t-1)^2}$	$u(t)=-\frac{1}{t-1}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$f(x)=\left[-\frac{\ln(t)}{t-1}\right]-$	$\int-\frac{1}{(t-1)t}dt$

$$\int\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt=\left[-\frac{\ln(t)}{t-1}\right]-\int-\frac{1}{(t-1)t}dt=-\frac{\ln(t)}{t-1}+\int\frac{1}{t(t-1)}dt$$

Or

$$\frac{1}{t(t-1)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}$$

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{1}{t-1}\right]_{t=0}=-1$$

On multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$b=\left[\frac{1}{t}\right]_{t=1}=1$$

$$\int\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt=-\frac{\ln(t)}{t-1}+\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt=-\frac{\ln(t)}{t-1}-\ln(t)+\ln(t-1)$$

2.

$$\begin{aligned}f(x)&=\left[-\frac{\ln(t)}{t-1}-\ln(t)+\ln(t-1)\right]_x^{x^2}\\&=-\frac{\ln(x^2-1)}{x^2-1}-\ln(x^2)+\ln(x^2-1)-\left(-\frac{\ln(x)}{x-1}-\ln(x)+\ln(x-1)\right)\\&=-\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}+\frac{\ln(x)}{x-1}-2\ln(x)+\ln(x)+\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\\&=-\frac{2\ln(x)}{(x-1)(x+1)}+\frac{\ln(x)}{x-1}-\ln(x)+\ln\left(\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right)\\&=\frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)}(-2+x+1)-\ln(x)+\ln(x+1)\\&=\frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)}(x-1)-\ln(x)+\ln(x+1)=\frac{\ln(x)}{x+1}-\ln(x)+\ln(x+1)\\&=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\ln(x)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

Remarque : il est sans doute possible de faire cet exercice d'une autre façon si on sait qu'une primitive de $t\to\frac{1}{\sin(t)}$ est $t\to\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

1.

$$x\le t\le 2x\Rightarrow 0<x\le t\le 2x<2\times\frac{\pi}{2}=\pi\Rightarrow 0<\sin(t)$$

Donc $t\to\frac{1}{\sin(t)}$ est continue sur $[x,2x]$, ce qui montre que F est définie, continue et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2.

$$F'(x)=\frac{2}{\sin(2x)}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{2}{2\sin(x)\cos(x)}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}-\frac{1}{\sin(x)}=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

Pour tout $\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $1-\cos(x)>0$, $\cos(x)>0$ et $\sin(x)>0$, donc $F'(x)>0$

Cette fonction est strictement croissante.

3. comme sin est C^∞ sur $\mathbb{R}$ on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, il existe $c\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\sin(t)=\sin(0)+t\sin'(0)+\frac{t^2}{2}\sin''(c)$$

Donc

$$\sin(t) = t - \frac{t^2}{2}\cos(t)$$

Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \cos(t) < 1$ donc

$$-\frac{t^2}{2} < -\frac{t^2}{2}\cos(t) < 0$$

Ce qui entraine que

$$t - \frac{t^2}{2} < t - \frac{t^2}{2}\cos(t) < t$$

Autrement dit

$$t - \frac{t^2}{2} < \sin(t) < t$$

D'autre part

$$t - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}(2 - t)$$

$$t > 0 \text{ et } t < \frac{\pi}{2} < 2$$

Entraine que $t - \frac{t^2}{2} > 0$

4.

Par conséquent

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{\sin(t)} < \frac{1}{t - \frac{t^2}{2}} = \frac{2}{t(2 - t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2 - t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t - 2}$$

A l'aide d'une décomposition en élément simple.

5.

On intègre entre x et $2x$ (on a bien $x < 2x$)

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t} < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sin(t)} < \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t - 2}\right) dt \Leftrightarrow [\ln(t)]_x^{2x} < F(x) < [\ln(t) - \ln(t - 2)]_x^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x) - \ln(x) < F(x) < \ln(2x) - \ln(2x - 2) - (\ln(x) + \ln(x - 2)) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{x}\right)$$

$$< F(x) < \ln\left(\frac{2x}{x}\right) - \ln\left(\frac{2x - 2}{x - 2}\right) \Leftrightarrow \ln(2) < F(x) < \ln(2) - \ln\left(\frac{2x - 2}{x - 2}\right)$$

6.

Comme

$$\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{2x - 2}{x - 2}\right) = \ln(1) = 0$$

On a d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \ln(2)$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1.

$$\frac{\ln(1 + t)}{t} = \frac{t + o(t)}{t} = 1 + o(1) \to 1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0, pour $t \neq 0$ f est le quotient de fonctions continues.

2. Les bornes sont des fonctions de classe C^1 ($x \to -x$ et $x \to x$) et f est continue donc F est de classe C^1.
3. Pour $x \neq 0$

$$F'(x)=f(x)-(-1)f(-x)=f(x)+f(-x)=\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1-x)}{-x}=\frac{1}{x}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$$
$$=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

On sait déjà que F est C^1 en 0, donc $F'(0)$ est la limite de $F'(x)$ lorsque $x\to 0$

$$F'(x)=\frac{1}{x}(\ln(1+x)-\ln(1-x))=\frac{1}{x}\big(x+o(x)-(-x+o(x)\big)=\frac{1}{x}\big(2x+o(x)\big)=2+o(1)\to 2$$

Donc $F'(0)=2$.

4.
$$F(-x)=\int_x^{-x}f(t)dt=-\int_{-x}^{x}f(t)dt=-F(x)$$

F est impaire.

5. Pour $0<x<1$, $1+x>1-x>0$ donc $\frac{1+x}{1-x}>1$, par conséquent $F'(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)>0$ ce qui montre que F est croissante sur $]0,1[$

Pour $-1<x<0$, $0<1+x<1-x$ donc $\frac{1+x}{1-x}<1$, par conséquent $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)<0$ et alors $F'(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)>0$ ce qui montre que F est croissante sur $]-1,0[$.

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1. g est continue sur I donc G est de classe C^1 sur I. Comme f et g sont continues sur I, $f\times g$ est continue sur I et et $x\to\int_a^x f(t)g(t)dt$ est de classe C^1 sur I, de plus f est continue sur I et $x\to a+G(x)$ est de classe C^1 sur I par conséquent F est de classe C^1 sur I.
2. Comme $\forall t\in I, g(t)\le 1$ alors $\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1\times dt$, autrement dit
$$G(x)\le x-a$$
Ce qui entraine que $a+G(x)\le x$
3.
$$F'(x)=f\big(a+G(x)\big)G'(x)-f(x)g(x)=f\big(a+G(x)\big)g(x)-f(x)g(x)$$
$$=g(x)\Big(f\big(a+G(x)\big)-f(x)\Big)$$
$$\forall x\in[a,b], g(x)\ge 0$$
D'autre part, comme f est décroissante $f\big(a+G(x)\big)\ge f(x)\Rightarrow f\big(a+G(x)\big)-f(x)\ge 0$, de plus pour $x\in[0,1]$ $g(x)\ge 0$ donc $F'(x)=g(x)\Big(f\big(a+G(x)\big)-f(x)\Big)\ge 0$.
On en déduit que F est croissante sur I.
4.
$$F(a)=\int_a^{a+G(a)}f(t)dt-\int_a^a f(t)g(t)dt=0$$
Et F est croissante donc $F(b)\ge 0$
Donc
$$\int_a^{a+G(b)}f(t)dt-\int_a^b f(t)g(t)dt\ge 0\Leftrightarrow\int_a^{a+\lambda}f(t)dt\ge\int_a^b f(t)g(t)dt$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. f est continue donc $x \to \int_0^x f(t)dt$ est dérivable, f est strictement monotone et continue donc admet une bijection réciproque continue f^{-1} et f est dérivable par conséquent $x \to \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$ est dérivable et enfin $x \to xf(x)$ est dérivable, ce qui fait de g une fonction dérivable.
2. $g'(x) = f(x) + f^{-1}\big(f(x)\big)f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0$
   g est donc constante sur un intervalle donc pour tout $x \in [0, a]$,
$$g(x) = g(0) = \int_0^0 f(t)dt + \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt - 0f(0) = 0$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

Remarque : les trois intégrales de cet exercice sont définies car $x \to \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

1. $x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$
$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$
$$x = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{1} = 1$$
$$x = \frac{1}{a} \Rightarrow t = a$$
$$\frac{\ln(x)}{1+x^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2(-\ln(t))}{t^2+1}$$
   Donc
$$\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_1^a \frac{t^2(-\ln(t))}{t^2+1}\frac{dt}{t^2} = -\int_1^a \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt = -\int_1^a \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$$
2.
$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_a^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = -\int_1^a \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx + \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1. $F(a) = \int_0^a \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx = [-\ln(1+\cos(x)]_0^a = -\ln(1+\cos(a)) + \ln(2)$
2.
   a)
$$\frac{\cos(-x)}{1+\cos(-x)}d(-x) = -\frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx \neq \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx$$
$$\frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos(\pi-x)}d(\pi-x) = -\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}dx \neq \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx$$
$$\frac{\sin(x+\pi)}{1+\cos(x+\pi)}d(x+\pi) = \frac{-\sin(x)}{1-\cos(x)}dx \neq \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx$$
   On doit faire le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

   b) $x = 2\arctan(t)$ donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, si $x = 0$ alors $t = \tan\left(\frac{0}{2}\right) = 0$ et si $x = a$ alors $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$

$$G(a)=\int_0^a \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx=\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{1-t^2}{1+t^2}dt$$

$$=\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}dt=\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)dt$$

$$=2\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} dt=2[\arctan(t)]_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}-\tan\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$=2\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right)-\tan\left(\frac{a}{2}\right)=2\frac{a}{2}-\tan\left(\frac{a}{2}\right)=a-\tan\left(\frac{a}{2}\right)$$

$\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right)=\frac{a}{2}$ car $\frac{a}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

3. $G(a)+H(a)=\int_0^a \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx+\int_0^a \frac{1}{1+\cos(x)}dx=\int_0^a \frac{\cos(x)+1}{1+\cos(x)}dx=\int_0^a dx=a$

   Donc $H(a)=a-G(a)=\tan\left(\frac{a}{2}\right)$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1. $t\to\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $x\to 2x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc dérivable.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4+16x^4}}-\frac{1}{\sqrt{4+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^4}}-\frac{1}{\sqrt{4+x^4}}=\frac{\sqrt{4+x^4}-\sqrt{1+4x^4}}{\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}}$$

$$=\frac{4+x^4-1-4x^4}{\left(\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+4x^4}\right)\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}}$$

$$f'(x)=\frac{3(1-x^4)}{\left(\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+4x^4}\right)\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}}=\frac{3(1-x^2)(1+x^2)}{\left(\sqrt{4+x^4}+\sqrt{1+4x^4}\right)\sqrt{1+4x^4}\sqrt{4+x^4}}$$

   Donc $f'(x)$ a le même signe que $1-x^2$.
   Si $x\in]-\infty,-1[$ f est décroissante.
   Si $x\in]-1,1[$ f est croissante.
   Si $x\in]1,+\infty[$ f est décroissante.

$$1\le t\le 2\Leftrightarrow 1\le t^2\le 16\Leftrightarrow \sqrt{5}\le\sqrt{t^2+4}\le 2\sqrt{5}\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{5}}\le\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\le\frac{1}{\sqrt{5}}$$

   En intégrant entre 1 et 2, on trouve que $\frac{1}{2\sqrt{5}}\le f(1)\le\frac{1}{\sqrt{5}}$

3. $f(0)=0$, $f'(0)=\frac{1}{2}$ donc $f(x)=\frac{1}{2}x+o(x)$ et une équation de la tangente est $y=\frac{1}{2}x$
4. $0\le\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\le\frac{1}{\sqrt{t^4}}=\frac{1}{t^2}$ et $x\le 2x$donc $\int_x^{2x}0dx\le\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}dx\le\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}dx$

   On en déduit que $0\le f(x)\le\left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x}=\frac{1}{2x}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$
5.

$$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{\sqrt{4+t^4}}=\frac{\sqrt{4+t^4}-t^2}{t^2\sqrt{4+t^4}}=\frac{4+t^4-t^4}{\left(\sqrt{4+t^4}+t^2\right)t^2\sqrt{4+t^4}}=\frac{4}{\left(\sqrt{4+t^4}+t^2\right)t^2\sqrt{4+t^4}}\le\frac{4}{(t^2+t^2)t^2t^2}$$

$$=\frac{2}{t^6}$$

   Et il est clair que $\frac{4}{\left(\sqrt{4+t^4}+t^2\right)t^2\sqrt{4+t^4}}\ge 0$

   Comme $x\le 2x$, on a

$$0 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}\right) dt \leq \int_x^{2x} \frac{2}{t^6} dt = \left[-\frac{2}{5t^5}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{80x^5} + \frac{2}{5x^5} = \frac{31}{80x^5}$$

On multiplie tout cela par $x > 0$

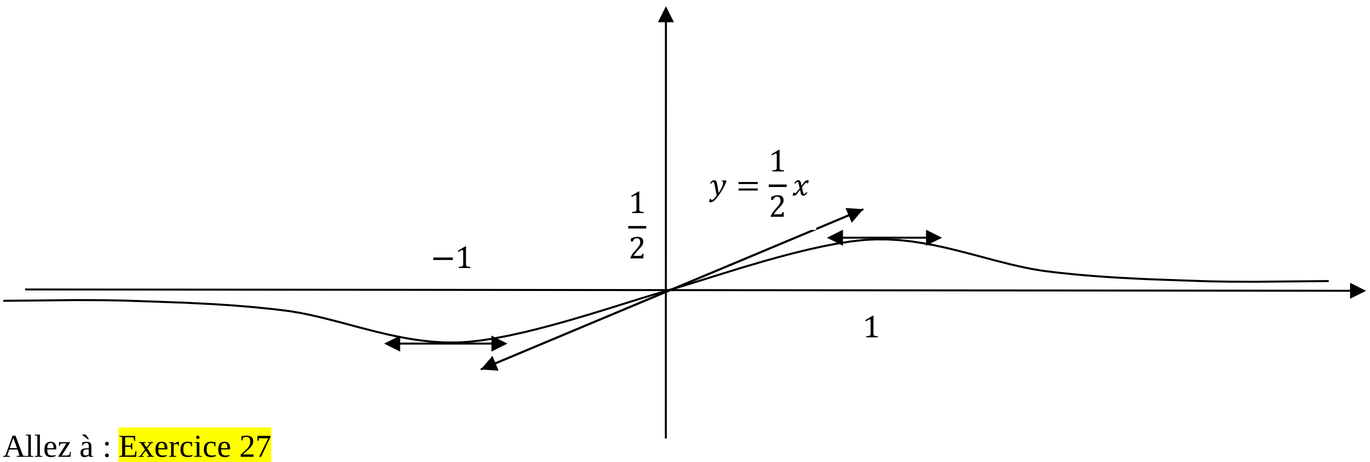
$$0 \leq g(x) \leq \frac{31}{80x^4}$$

D'où $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

D'autre part, $g(x) = x\left(\int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt - f(x)\right) = x\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} - xf(x) = \frac{1}{2} - xf(x)$

Donc $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \frac{1}{2}$, où encore $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

6. D'après la question 2°) $\frac{1}{2\sqrt{5}} \leq f(1) \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, $f(1)$ est « en gros » compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ si on approxime $\sqrt{5}$ avec 2.



Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1. $t \to \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, $x \to 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2.

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

$u = -t \Leftrightarrow t = -u \Rightarrow dt = -du$

$$t = -x \Rightarrow u = x$$
$$t = -2x \Rightarrow u = 2x$$
$$F(-x) = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{(-u)^4 + (-u)^2 + 1}} = -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+u^2+1}} = -F(x)$$

F est impaire.

3.

$$0 < \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{t^4}} = \frac{1}{t^2}$$

Et $x < 2x$ entraine que

$$\int_x^{2x} 0dt = 0 < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} < \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

4.

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^4+(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$= \frac{4(x^4+x^2+1)-(16x^4+4x^2+1)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times\sqrt{x^4+x^2+1}\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{3-12x^4}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times\sqrt{x^4+x^2+1}\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{3(1-4x^4)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times\sqrt{x^4+x^2+1}\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)}$$

Donc

$$\begin{cases} F'(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4x^4 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = \frac{1}{4} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. Si $x > 0$, $0 < x < 2x$ et pour tout $t \in [x, 2x]$, $t \to \frac{e^{-t}}{t}$ est continue donc F est de classe C^1.

   Si $x < 0$, $2x < x < 0$ et pour tout $t \in [2x, x]$, $t \to \frac{e^{-t}}{t}$ est continue donc F est de classe C^1.

   Donc pour tout $x \neq 0$, F est dérivable.

2.
   a) $t \to e^{-t}$ est suffisamment dérivable pour admettre une formule de Taylor Lagrange à l'ordre 1. Il existe c dans l'intervalle $0, t$, c'est-à dire $]t, 0[$ si $t < 0$ et $]0, t[$ si $t > 0$ (donc dans $] - -|t|, |t|[$ tel que :

   $$f(t) = f(0) + tf'(c) \Leftrightarrow e^{-t} = 1 + t(-e^{-c}) = 1 - te^{-c}$$

   b) Comme $-1 < c < 1$ on a : $-1 < -c < 1$ et donc $e^{-1} < e^{-c} < e^1$
   D'autre part

   $$e^{-c} = \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t}$$

   Ce qui entraine que

   $$\frac{1}{e} < \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t} < e$$

   c) Si $x > 0$ alors $x < 2x$

   $$\int_x^{2x} \frac{1}{e} dt \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t}\right) dt \leq \int_x^{2x} e dt \Leftrightarrow \frac{1}{e}(2x-x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt - F(x) \leq e(2x-x)$$

   $$\Leftrightarrow \frac{x}{e} \leq [\ln(t)]_x^{2x} - F(x) \leq ex \Leftrightarrow \frac{x}{e} \leq \ln(2x) - \ln(x) - F(x) \leq ex \Leftrightarrow \frac{x}{e} \leq \ln(2) - F(x) \leq ex$$

   Lorsque x tend vers 0^+, $\frac{x}{e}$ et ex tendent vers 0^+ donc $F(x)$ tend vers $\ln(2) = F(0)$ ce qui montre que F est continue à droite.
   Si $x < 0$ alors $2x < x$

$$\int_{2x}^{x}\frac{1}{e}dt\leq\int_{2x}^{x}\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{t}\right)dt\leq\int_{2x}^{x}edt\Leftrightarrow\frac{1}{e}(x-2x)\leq\int_{2x}^{x}\frac{1}{t}dt-\int_{2x}^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt\leq e(x-2x)$$
$$\Leftrightarrow-\frac{x}{e}\leq[\ln(t)]_{2x}^{x}+F(x)\leq-ex\Leftrightarrow-\frac{x}{e}\leq\ln(x)-\ln(2x)+F(x)\leq-ex\Leftrightarrow-\frac{x}{e}$$
$$\leq-\ln(2)+F(x)\leq-ex$$

Lorsque x tend vers 0^-, $\frac{x}{e}$ et ex tendent vers 0^- donc $F(x)$ tend vers $\ln(2)=F(0)$ ce qui montre que F est continue à gauche.

Finalement F est continue en 0.

3.

$$F'(x)=\frac{e^{-2x}}{2x}\times2-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=\frac{e^{-x}}{x}(e^{-x}-1)$$
$$F'(x)=\frac{e^{-x}}{x}(1-x+o(x)-1)=\frac{e^{-x}\big(-x+o(x)\big)}{x}=e^{-x}\big(-1+o(1)\big)$$
$$\lim_{x\to0}F'(x)=\lim_{x\to0}e^{-x}\big(-1+o(1)\big)=-1$$

Le graphe de F admet une tangente oblique en $x=0$ de pente -1.

4. Si $x<0$ alors $e^{-x}-1>0$ et donc $F'(x)<0$
Si $x>0$ alors $e^{-x}-1<0$ et donc $F'(x)<0$
Si $x=0$ alors $F'(0)=-1<0$
F est décroissante sur $\mathbb{R}$

5.

$$t\geq1\Leftrightarrow0\leq\frac{1}{t}\leq1\Leftrightarrow0\leq\frac{e^{-t}}{t}\leq e^{-t}$$

Donc, puisque si $x>0$, $x<2x$

$$0\leq\int_{x}^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt\leq\int_{x}^{2x}e^{-t}dt=[-e^{-t}]_{x}^{2x}=-e^{-2x}+e^{-x}\to_{(x\to+\infty)}0$$
$$\lim_{x\to\infty}F(x)=0$$

6. Il existe $c\in]t,0[$ tel que $e^{-t}=1-te^{-c}$

$$t<c<0\Leftrightarrow0<-c<-t\Leftrightarrow e^{0}<e^{-c}<e^{-t}\Rightarrow1<e^{-c}\Rightarrow-t<-te^{-c}$$

Car $-t>0$, puis on rajoute 1 de chaque côté pour obtenir

$$1-t<1-te^{-c}=e^{-t}$$

On multiplie cette inégalité par $t<0$

$$\frac{1-t}{t}>\frac{e^{-t}}{t}$$

Ensuite on intègre entre $2x$ et x, car pour $x<0$, $2x<x$

$$\int_{2x}^{x}\frac{1-t}{t}dt>\int_{2x}^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt\Leftrightarrow\int_{2x}^{x}\left(\frac{1}{t}-1\right)dt>-F(x)\Leftrightarrow[\ln(t)-t]_{2x}^{x}>-F(x)$$
$$\Leftrightarrow\ln(x)-x-(\ln(2x)-2\mathrm{x})>-F(x)\Leftrightarrow x-\ln\left(\frac{x}{2x}\right)>-F(x)\Leftrightarrow F(x)$$
$$>-x+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-x-\ln(2)$$

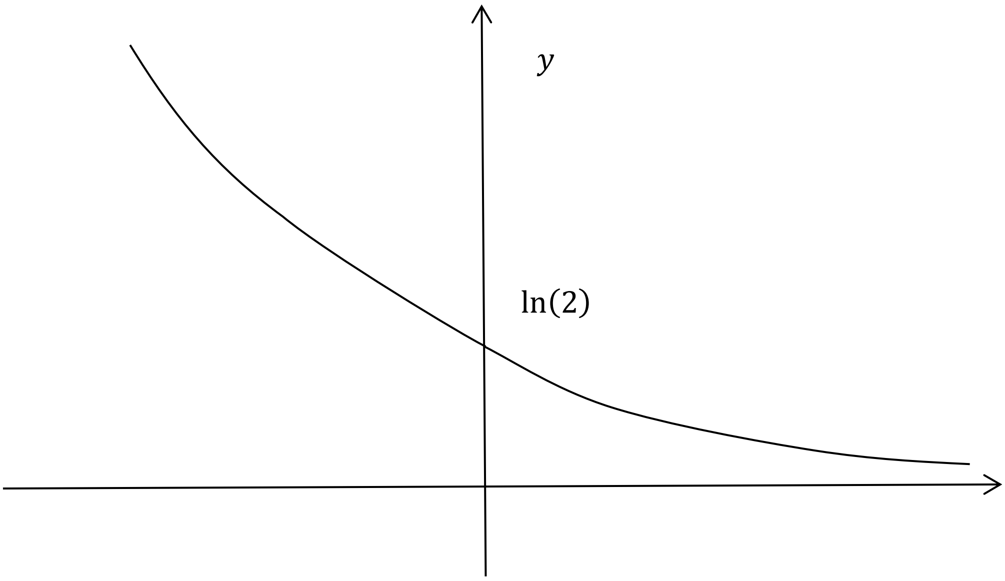
Comme

$$\lim_{x\to-\infty}-\ln(2)-x=+\infty$$

On a

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$$

7.



Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1. Si $t > 0$ et $t \neq 1$, f est le quotient de fonctions continues donc f est continue.
   Pour $t = 1$, on fait le changement de variable $u = t - 1$, $t = 1 + u$,
   $f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1} = \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{u+o(u)}{u} = 1 + o(1)$ donc $\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{u\to 0}\big(1 + o(1)\big) = 1 = f(1)$
   f est continue, l'intégrale est faussement impropre.
2. Si $0 < t < 1$, $\ln(t) < 0$ et $t - 1 < 0$ donc $f(t) > 0$
   Si $t > 1$, $\ln(t) > 0$ et $t - 1 > 0$ donc $f(t) > 0$.
   Si $t = 1$, $f(1) = 1 > 0$
   Donc pour tout $t > 0$, $f(t) > 0$.
3. Si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x$, comme $f(t) > 0$, $F(x) < 0$.
   Si $x > 1$ alors $x^2 > x$, comme $f(t) > 0$, $F(x) > 0$.
4. f est continue et $x \to x^2$ est de classe C^1 donc F est de classe C^1.
$$F'(x) = \frac{2x\ln(x^2)}{x^2-1} - \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{4x\ln(x)}{x^2-1} - \frac{(x+1)\ln(x)}{x^2-1} = \frac{(3x-1)}{(x+1)}\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{(3x-1)}{(x+1)}f(x)$$
   Comme $f(x) > 0$ et que $x + 1 > 0$ car $x > 0$, $F'(x)$ a le même signe que $3x - 1$.
   Si $0 < x < \frac{1}{3}$, $F'(x) < 0$ et F est décroissante.
   Si $x > \frac{1}{3}$, $F'(x) > 0$ et F est croissante.

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1.
$$\frac{2t^2}{t^2-1} = \frac{2t^2-2+2}{t^2-1} = \frac{2(t^2-1)+2}{t^2-1} = 2 + \frac{2}{t^2-1}$$
$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{(t+1)}$$
   Je multiplie par $t - 1$, puis $t = 1$
$$a = \left[\frac{2}{t+1}\right]_{t=1} = 1$$
   Je multiplie par $t + 1$, puis $t = -1$
$$b = \left[\frac{2}{t-1}\right]_{t=-1} = -1$$

Donc

$$\frac{2}{t^2-1}=\frac{2}{(t-1)(t+1)}=\frac{1}{t-1}+\frac{-1}{t+1}$$

$$\int\frac{2t^2}{t^2-1}dt=2t+\ln|t-1|-\ln|t+1|+K=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+K$$

2.

$t=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow t^2=1-x\Leftrightarrow x=1-t^2$ donc $dx=-2tdt$

$$\int\frac{\sqrt{1-x}}{x}dx=\int\frac{t}{1-t^2}(-2dt)=\int\frac{2t^2}{t^2-1}dt=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+K$$

$$=2\sqrt{1-x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+K$$

3.

$$F(x)=\int\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}dx=\left[-2\sqrt{1-x}\ln(x)\right]+\int 2\sqrt{1-x}\frac{1}{x}dx$$

$$F(x)=-2\sqrt{1-x}\ln(x)+4\sqrt{1-x}+2\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+K$$

$$F(x)=-2\sqrt{1-x}\ln(x)+4\sqrt{1-x}+2\ln\left(1-\sqrt{1-x}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right)+K$$

K a changé en cours de route, est-ce bien grave ? J'ai enlevé les valeurs absolues parce que j'en ai le droit.

4. $x\to\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}$ n'est pas définie en 0 et 1, donc cette fonction n'est pas continue, il s'agit d'une intégrale généralisée en 0 et en 1.
5. En 0. $\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}\sim\ln(x)$, $x^{\frac{1}{2}}\ln(x)\to 0$ et $\frac{1}{2}<1$, donc l'intégrale converge en 0.

   En 1, on pose $t=1-x$, $x=1-t$, $\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}=\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\sim\frac{t}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}\to 0$, l'intégrale est faussement impropre (généralisée) en 1 donc l'intégrale converge en 1.
6. $g(x)=-2\ln(x)\sqrt{1-x}+2\ln\left(1-\sqrt{1-x}\right)$

$$g(x)=-2\ln(x)\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)+2\ln\left(1-\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)\right)$$

$$=-2\ln(x)+x\ln(x)\left(1+o(1)\right)+2\ln\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)$$

$$=-2\ln(x)+x\ln(x)\left(1+o(1)\right)+2\ln\left(x\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)$$

$$=-2\ln(x)+x\ln(x)\left(1+o(1)\right)+2\ln(x)+2\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$$

$$=x\ln(x)\left(1+o(1)\right)+2\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$$

Comme $\lim_{x\to 0}x\ln(x)=0$, $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\left(2\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)=-2\ln(2)$

$$\lim_{x\to 0}F(x)=-2\ln(2)+4-2\ln(2)+K=4-4\ln(2)+K$$

7.

$$I_{\varepsilon,a}=\int_{\varepsilon}^{a}\frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}dx=F(a)-F(\epsilon)$$

$$I_{\varepsilon,a}=2\sqrt{1-a}\ln(a)-4\sqrt{1-a}+2\ln\left(1-\sqrt{1-a}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{1-a}\right)-(2\sqrt{1-\varepsilon}\ln(\varepsilon)$$
$$-4\sqrt{1-\varepsilon}+2\ln\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{1-\varepsilon}\right)$$

Clairement $F(1) = K$ et $F(0) = \lim_{\epsilon \to 0} F(\varepsilon) = 4 - 4\ln(2) + K$

Donc $I = F(1) - F(0) = 4 - 4\ln(2)$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1. f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis, par conséquent il existe $c \in]0,1[$ tel que :
$$f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = f(1) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) f'(c) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} f'(c)$$
Comme f' est continue sur un intervalle fermé borné $[0,1]$, f' est borné et atteint ses bornes donc il existe x_m et x_M dans $[0,1]$ tels que pour tout $c \in]0,1[$
$$f'(x_m) \leq f'(c) \leq f'(x_M)$$
Or $f'(x_m) > 0$ donc
$$0 < f'(x_m) \leq f'(c)$$
Ce qui montre que
$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} f'(c) \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} f'(x_m)$$
Puis on pose $a = f'(x_m)$ pour montrer le résultat.
2.
$$I_n = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \big(f(x)\big)^n dt \leq \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n dt$$
Car f est croissante
$$I_n \leq \left(f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \left(f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(f\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$$
$$n\ln\left(f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) < n\ln\left(1 - \frac{a}{\sqrt{n}}\right) = n\left(-\frac{a}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = -\sqrt{n}\big(a + o(1)\big)$$
Comme $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f(x)$
$$0 \leq I_n \leq e^{-\sqrt{n}(a+o(1))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$$0 \leq J_n = \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \big(f(x)\big)^n dx \leq \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 dx$$
Car $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$
$$0 \leq J_n = \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \big(f(x)\big)^n dx \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
D'après le théorème des gendarmes I_n et J_n tendent vers 0, puis d'après la relation de Chasles
$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^n dt = I_n + J_n$$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \big(f(x)\big)^n dt = 0$$

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

Première partie

1. On pose $X = \frac{1}{x}$, Pour $x \neq 0$, $u_n(x) = X^n e^{-X^2}$

$$\lim_{x\to 0} u_n(x) = \lim_{X\to\infty} X^n e^{-X^2} = 0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur les fonctions polynômes.

2. On peut faire le même changement de variable qu'à la question 1°) ou remarquer que $u_0(x) = \varphi(x)$ d'où l'on déduit que : $\lim_{x\to 0} u_0(x) = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 = \varphi(0)$

Donc φ est continue en 0, pour $x \neq 0$, φ est continue en tant que composée de fonctions continues.

$$\varphi'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 2u_3(x)$$

Donc, en utilisant la première question $\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$, comme de plus φ est continue en 0, on en déduit que φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \lim_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$. (Et même de classe C^1). Pour $x \neq 0$, φ' est dérivable en tant que composée de fonctions dérivable.

Pour $x \neq 0$, $\varphi'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3}\varphi(x)$ donc $x^3\varphi'(x) = 2\varphi(x)$

Pour $x = 0$, $x^3\varphi'(x) = o^3 \times 0 = 0$ et $2\varphi(x) = 2 \times 0 = 0$, il y a aussi égalité.

3. Pour $x < 0$, $\varphi'(x) < 0$ donc φ est décroissante.

Pour $x > 0$, $\varphi'(x) > 0$ donc φ est croissante.

L'étude des points d'inflexion n'est plus vraiment au programme, mais je rappelle que le graphe d'une fonction deux fois dérivable admet un point d'inflexion si et seulement si la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Pour $x \neq 0$, $\varphi''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^6}(-3x^2 + 2)e^{-\frac{1}{x^2}}$

Pour $x = 0$, $\varphi''(x) = -6u_4(x) + 4u_6(x)$ donc sa limite en 0 est nulle.

Il y a trois valeurs qui annulent $\varphi''(x)$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, 0 et $\sqrt{\frac{2}{3}}$,

Pour x proche de 0 et non nul, il est clair que $\varphi''(x) > 0$ donc il n'y a pas de points d'inflexion en 0.

Par contre $-3x^2 + 2$ change de signe en $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, donc φ admet un point d'inflexion en chacun de ces points.

Allez à : Exercice 33

Deuxième partie

4.

$$f(-x) = e^{\frac{1}{(-x)^2}} \int_0^{-x} \varphi(t)dt = e^{\frac{1}{x^2}} \int_0^{-x} \varphi(t)dt$$

Je fais le changement de variable $t = -u$ dans l'intégrale, $dt = -du$, $\varphi(t) = \varphi(-u) = e^{\frac{1}{(-u)^2}} = \varphi(u)$

Si $t = 0$ alors $u = 0$ et si $t = -x$ alors $u = x$ donc

$$f(-x) = e^{\frac{1}{(-x)^2}} \int_0^{-x} \varphi(t)dt = e^{\frac{1}{x^2}} \int_0^{x} \varphi(u)(-du) = -f(x)$$

f est impaire.

5.

Pour $x > 0$, φ est croissante donc $0 < t < x$ entraine $0 = \varphi(0) < \varphi(t) < \varphi(x)$

J'intègre entre 0 et x : $\int_0^x 0dx \leq \int_0^x \varphi(t)dt \leq \int_0^x \varphi(x)dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^x \varphi(t)dt \leq x\varphi(x)$

6. Je multiplie ces inégalités par $e^{\frac{1}{x^2}}$: $0 \leq e^{\frac{1}{x^2}} \int_0^x \varphi(t)dt \leq x\varphi(x)e^{\frac{1}{x^2}} = x$

Je fais tendre x vers 0^+, j'en déduis que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, f est continue en 0.

Comme f est impaire la limite en 0^- est $-0 = 0 = f(0)$.

Pour $x \neq 0$, φ continue entraine $x \to \int_0^x \varphi(t)dt$ est dérivable donc continue. Pour $x \neq 0$ $x \to e^{\frac{1}{x^2}}$ est continue, f est le produit de deux fonctions continues, f est continue.

7. $x \to \int_0^x \varphi(t)dt$ est dérivable (on l'a déjà vu) et $x \to e^{\frac{1}{x^2}}$ est dérivable pour $x \neq 0$, donc f est dérivable.
   On calcule $f'(x)$ pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt + e^{\frac{1}{x^2}}\varphi(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt + 1$
8. (1) est $t^3\varphi'(t) = 2\varphi(t)$ en changeant x en t.
   Donc $\int_0^x 2\varphi(t)dt = \int_0^x t^3\varphi'(t)dt$
   J'intègre la seconde intégrale par partie (en intégrant $\varphi'(t)$ et en dérivant t^3)
$$2\int_0^x \varphi(t)dt = [t^3\varphi(t)]_0^x - \int_0^x 3t^2\varphi(t)dt = x^3\varphi(x) - 3\int_0^x t^2\varphi(t)dt$$
   C'est bien ce qu'il fallait montrer. (il reste à diviser par 2)
   Je vais tenter quelque chose de classique mais qui ne permet pas de conclure.
$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt + 1 = -\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}\left(x^3\varphi(x) - 3\int_0^x t^2\varphi(t)dt\right) + 1$$
$$= -1 + e^{\frac{1}{x^2}}\frac{3\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x^3} + 1 = \frac{3e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x^3}$$
   J'aurais aimé pouvoir calculer la limite de $f'(x)$ en 0 mais la limite de $\frac{3e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x^3}$ n'a rien de simple, si j'avais trouvé cette limite j'aurais conclu de la façon suivante :
   $f'(x)$ admet une limite en 0 et f est continue en 0 donc f est dérivable en 0 (et même C^1).
   Dans ce cas la bonne solution est de revenir à la définition de la dérivée, c'est-à-dire au taux de variation.
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt}{x} = \frac{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}\varphi(x) - 3e^{\frac{1}{x^2}}\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{2x} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}e^{\frac{1}{x^2}}\frac{\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x}$$
   Il reste à calculer la limite en 0 de $\frac{\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{xe^{-\frac{1}{x^2}}} = \frac{\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x\varphi(x)}$, on pourrait appliquer la règle de l'Hospital, mais on a vu que pour $0 \leq t \leq x$ on a $0 \leq \varphi(t) \leq \varphi(x)$, donc pour $x > 0$, $0 < \int_0^x t^2\varphi(t)dt < \varphi(x)\int_0^x t^2 dt = \frac{\varphi(x)x^3}{3}$
   Par conséquent : $0 < \frac{\int_0^x t^2\varphi(t)dt}{x\varphi(x)} < \frac{x^2}{2}$, d'où l'on déduit que la limite en 0^+ de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est nulle, f étant impaire, on en déduit qu'en 0^- la limite est aussi nulle.
   On en déduit que f est dérivable et que $f'(0) = 0$.

Remarque :
   On ne peut pas conclure que f est C^1 en 0.

9. $\frac{F(x)}{G(x)}$ est une forme indéterminée lorsque $x \to 0$, si $\frac{F'(x)}{G'(x)}$ admet une limite en 0 c'est la même que celle de $\frac{F(x)}{G(x)}$.
   $F'(x) = \varphi(x)$ et $G'(x) = 3x^2\varphi(x) + x^3\varphi'(x) = 3x^2\varphi(x) + 2\varphi(x) = (3x^2 + 2)\varphi(x)$
$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{\varphi(x)}{(3x^2 + 2)\varphi(x)} = \frac{1}{3x^2 + 2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2 + 2} = \frac{1}{2}$$
   Donc $\frac{F(x)}{G(x)}$ admet une limite en 0 qui est la même que celle de $\frac{F'(x)}{G'(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{1}{2}$$

Or $\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{\int_0^x \varphi(t)dt}{x^3\varphi(x)}=\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\int_0^x \varphi(t)dt}{x^3}=\frac{f(x)}{x^3}$, donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$

Cette limite s'écrit aussi $\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{2}+o(1)$ avec $\lim_{x\to 0}o(1)=0$

En multipliant par x^3 on obtient : $f(x)=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$

C'est le développement limité de f à l'ordre 3.

Allez à : Exercice 33